

Université de Paris

Faculté des Sciences d'Orsay

AO . 631

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

DERRIDJ Maklouf

1ère Thèse : " Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs différentiels du second ordre hypoelliptiques ".

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté.

soutenues le 8 juin 1970 devant la Commission d'examen

MM. DENY

Président

LIONS

PRIOURET

SCHWARTZ

TEMAM

) Examinateurs

Université de Paris

Faculté des Sciences d'Orsay

AO . 631

THESES

présentées

pour obtenir le grade de

Docteur és-Sciences Mathématiques

par

DERRIDJ Maklouf

1ère Thèse : " Un problème aux limites pour une classe d'opérateurs différentiels du second ordre hypoelliptiques ".

2ème Thèse : Propositions données par la Faculté.

soutenues le 8 juin 1970 devant la Commission d'examen

MM. DENY

Président

LIONS

PRIOURET

SCHWARTZ

TEMAM

) Examinateurs

Université de Paris

Faculté des Sciences Exactes

1955

THÈSE

présentée

pour obtenir le grade de

Docteur ès-Sciences Mathématiques

par

René de Vries



La Thèse a été présentée et acceptée par le jury d'examen le 15/12/55

Le Président du Jury, Prof. J. van der Waerden

Le Rapporteur, Prof. H. de Vries

La Thèse a été déposée le 15/12/55 à la Bibliothèque de la Faculté

Président

M. de Vries

Le Rapporteur

Prof. J. van der Waerden

Examinateurs

Prof. H. de Vries

Prof. J. van der Waerden

Table des Matières

.....

CHAPITRE 1. Une généralisation de l'Inégalité d'Hormander-Application.

1. Une inégalité de type L^p	1
2. Application à un problème non linéaire	5

CHAPITRE 2. Un résultat de traces.

1. Existence de traces	15
2. Etude du cas où l'espace est de dimension 2	22

CHAPITRE 3. Une inégalité Fondamentale.

1. Quelques lemmes préliminaires	23
2. L'inégalité fondamentale	32

CHAPITRE 4. Existence - Unicité - Régularité des Solutions.

1. Existence et Unicité des solutions	35
2. Régularité des solutions	47
3. Quelques exemples	60

CHAPITRE 5. Un résultat de non compacité.

1. Un résultat de compacité	70
2. Un résultat de non compacité	71

.....



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550207_0021

UN PROBLEME AUX LIMITES POUR UNE CLASSE

D'OPERATEURS DIFFERENTIELS DU SECOND ORDRE HYPOELLIPTIQUES.

Par Makhlouf DERRIDJ

-:-:-:-:-

INTRODUCTION

On considère un opérateur différentiel du second ordre, P donné par

$$(1) \quad P = \sum_1^{\tau} X_j^2 + X_0 + \lambda$$

où $X_0, X_1, \dots, X_{\tau}$ sont des champs de vecteurs à coefficients réels et de classe C^{∞} dans un ouvert O de R^n et λ une fonction à valeurs complexes de classe C^{∞} dans l'ouvert O . Soit Ω un ouvert borné à frontière régulière tel que $\bar{\Omega} \subset O$. On se pose les problèmes suivants :

- a) Hypoellipticité de P dans Ω .
- b) Existence de problèmes aux limites bien posés pour P ?
- c) Régularité des solutions au bord Γ de Ω dans le cas où b est résolu.

Le point a) a été résolu par Hormander [7] qui a donné une condition suffisante et presque nécessaire pour que P soit hypoelliptique dans O . Cette condition que nous noterons (H.O) est la suivante.

(H.O) : L'algèbre de Lie $\mathcal{L}(X_0, \dots, X_{\tau})$ engendré par les champs de vecteurs $X_0, \dots, X_{\tau}$ est de rang constant, égal à n dans l'ouvert O .

Ici, on apporte une contribution aux points b) et c). Moyennant deux hypothèses supplémentaires qui sont les suivantes :

(H. Γ) : En tout point x de la frontière Γ , il existe un indice $j(x)$ tel que le vecteur $X(x)$ soit transversal à Γ .

Il convient de remarquer que J.M. Bonny a utilisé la même hypothèse, formulée d'une manière différente, pour montrer la résolubilité du problème de Dirichlet, pour des ouverts non réguliers

(H. λ) On suppose que $\operatorname{Re} \lambda$ est assez grand ce qui sera précisé ultérieurement. (H. Γ) et (H. λ) sont utilisés dans le point b) et ((H. Γ) (H.0)) sont utilisés pour montrer la régularité au bord des solutions.

Auparavant nous donnons certains résultats concernant les champs X_j $j = 1, \dots, r$ vérifiant l'hypothèse (H.0).

Ainsi dans le chapitre 1 nous généralisons à L^p $p \geq 2$ l'inégalité de Hormander

$$\|u\|_\varepsilon \leq C \left(\|u\|_{L^2} + \sum_{j=1}^r \|X_j u\|_{L^2} \right) \quad u \in C_0^\infty(K)$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Ce qui nous amènera à nous demander si les fonctions $X_j u \in L^2(\Omega)$ $j = 1, \dots, r$ admettent des traces sur Γ . Cette question sera abordée au chapitre 2. Au chapitre 3, nous démontrons une inégalité fondamentale qui permettra d'établir la régularité au bord des solutions d'un problème aux limites.

L'étude de ce problème sera faite dans le chapitre 4. Dans ce chapitre nous donnons aussi comme exemple important l'équation de Kolmogorov.

Enfin dans le chapitre 5 nous donnons un résultat de compacité.

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur Jacques Louis LIONS pour ses continuels encouragements et ses nombreuses suggestions.

Je remercie Monsieur Mohammed Salah BAOUENDI qui a guidé mes premiers pas dans la recherche Mathématique et Monsieur Claude BARDOS, dont l'aide m'a été précieuse.

-:-:-:-

CHAPITRE 1.

-:-:-

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE D'HORMANDER-APPLICATION

-:-

1. Une inégalité de type L^p :

1.1. Notations : A un champ de vecteurs X donné par ses coordonnées $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$, défini dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons associer d'une manière biunivoque un opérateur différentiel homogène du premier ordre dans cet ouvert

$$X(x) = \{\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)\} \rightarrow Xu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$$

Ainsi un champ de vecteurs défini dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ peut être identifié à un opérateur différentiel homogène du premier ordre dans cet ouvert. Si deux champs de vecteurs X et Y sont de classe C^1 (i.e. leurs coordonnées $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$, $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$ sont de classe C^1) dans un ouvert O de $\mathbb{R}^n$ nous définissons leur corchet par :

$$[X, Y]u = (XY - YX)u \quad u \in C^\infty(O)$$

Remarquons que si les coordonnées de X et Y sont respectivement $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ et $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$, celles de $[X, Y]$ seront :

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_1}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \right), \dots, \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \beta_n}{\partial x_i} - \beta_i \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_i} \right) \right)$$

considérons maintenant un système de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_r\}$,

qui soient de classe C^∞ dans un ouvert O de $\mathbb{R}^n$; nous pouvons alors définir des crochets de tous ordres à partir des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$.

Soit $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ un multi-indice, avec $i_j \in \{1, \dots, r\}$ pour $j = 1, \dots, k$; alors le champ de vecteurs X_I sera défini par :

$$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]] ,$$

Nous appelons $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ l'ensemble des champs de vecteurs, définis dans l'ouvert O , qui s'écrivent sous la forme

$$Z = \sum_I \lambda_I X_I \quad \lambda_I \in C^\infty(O) , \text{ la somme étant fixe.}$$

1.2. L'hypothèse (H.0).

Le rang de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ en un point $x \in O$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $Z(x)$ avec $Z \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$. Alors l'hypothèse (H.0) est la suivante :

(H.0) : le rang de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_r)$ est égal à n en tout point de O .

1.3. Exemples :

a) $X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} ; X_2 = \frac{\partial}{\partial x} ; O = \mathbb{R}^2$

nous avons $[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial y}$; ainsi $[X_1, X_2]$ et X_2 engendrent $\mathbb{R}^2$ en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b) plus généralement : $X_1 = \prod_{j=1}^k (x - x_j) \frac{\partial}{\partial j} , X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$

il suffit de prendre le crochet

$$[X_1, [X_1, \dots [X_1, X_2]] \text{ où } X_1 \text{ figure } (n_1 + n_2 + \dots + n_k) \text{ fois}$$

$$c) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial y} \quad ; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} \quad ; \quad 0 = \mathbb{R}^3$$

alors $[X_1, X_2] = \frac{\partial}{\partial y}$, il est visible que X_1, X_2 et $[X_1, X_2]$ engendrent $\mathbb{R}^3$ en tout point. Cet exemple montre que le nombre de champ de vecteurs vérifiant l'hypothèse (H.0) peut être strictement inférieur à n , n étant la dimension de l'espace considéré.

1.4. Semi-normes attachées à un champ de vecteurs :

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X un champ de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans O . Soit K un compact contenu dans O . Alors nous savons qu'il existe un voisinage V de K dans O , un nombre $t_0 > 0$ et une application de $V \times]-t_0, t_0[$ dans O , de classe C^∞ telle que :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{df(x,t)}{dt} = X(f(x,t)) & (x,t) \in V \times]-t_0, t_0[\\ f(x,0) = x \end{cases}$$

Définissons l'application e^{tX} par :

$$(e^{tX}u)(x) = u(f(x,t)) \quad ; \quad (x,t) \in V \times]-t_0, t_0[$$

pour t assez petit, e^{tX} applique $C_0^\infty(K)$ dans $C_0^\infty(O)$. Il est utile de remarquer que e^{tX} n'est autre qu'une petite translation suivant les caractéristiques du champ X .

Soit $p > 1$ (pour les applications, il nous suffit de prendre $p \geq 2$). Pour chaque couple (ε, s) avec $0 < s \leq 1$ et $0 < \varepsilon \leq t_0$ nous définissons la semi-norme suivante :

$$(1.2) \quad |u|_{s,X,p}^\varepsilon = \sup_{0 < |t| < \varepsilon} |t|^{-s} \|e^{tX}u - u\|_{L^p}, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

$\|u\|_p = \{ \|u\|_{L^p}^p + (|u|_{s,X,p}^\varepsilon)^p \}^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $C_0^\infty(K)$. D'autre part si ε_1 et ε_2 sont deux nombres tels que $0 < \varepsilon_1 \leq t_0$, $0 < \varepsilon_2 \leq t_0$, les quantités $|u|_{s,X,p}^{\varepsilon_1}$ et $|u|_{s,X,p}^{\varepsilon_2}$ ne diffèrent que par une quantité majorée par une constante fois $\|u\|_{L^p}$. Comme ce qui nous intéressera par la suite, ce seront les normes $\|u\|_p$, nous pouvons supprimer l'indice ε dans la notation et écrire $|u|_{s,X,p}$. $u \in C_0^\infty(K)$.

Pour $0 < s \leq 1$ et $\varepsilon \leq t_0$ nous définissons la semi-norme

$$(1.3) \quad |u|_{s,p}^\varepsilon = \sup_{0 < |h| < \varepsilon} |h|^{-s} \|\tau_h u - u\|_{L^p} \quad u \in C_0^\infty(K)$$

$\tau_h u$ étant la translatée de la fonction u , suivant le vecteur $h(h_1, \dots, h_n)$. Pour la même raison que pour $|u|_{s,X,p}$, cette dernière semi-norme sera simplement notée $|u|_{s,p}$, $u \in C_0^\infty(K)$.

1.5. Les espaces $W^{s,p}$:

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si k est un entier positif $W_{0^-}^{k,p}(U)$ designera l'espace des fonctions $u \in L^p(U)$ dont toutes les dérivées au sens des distributions d'ordre inférieur ou égal à k sont dans $L^p(V)$. C'est un espace de Banach reflexif pour la norme

$$u \longmapsto \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{k,p}$$

Pour s non entier, $s = k + \sigma$ (k entier ≥ 0 , $0 < \sigma < 1$) $W^{s,p}(U)$ est l'espace des fonctions u qui appartiennent à $W^{k,s}(U)$ et telles que :

$$(1.4) \quad \iint_{U \times U} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\sigma}} dx dy < +\infty, \quad |\alpha| = k.$$

C'est un espace de Banach réflexif pour la norme :

$$\left\{ \|u\|_{k,p}^p + \sum_{|\alpha|=k} \iint_{U \times U} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\sigma}} dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{s,p}$$

$W_0^{s,p}(U)$ désignera la fermeture de $\mathcal{D}(U)$ dans $W^{s,p}(U)$, $\mathcal{D}(U)$ étant l'espace des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans U .

Rappelons un résultat de traces relatif à ces espaces. [5].

Théorème : pour $s > \frac{1}{p}$ ($s - \frac{1}{p}$ non entier), le plus grand entier inférieur à $s - \frac{1}{p}$ étant noté $[s - \frac{1}{p}]$, l'application

$$u \rightarrow \left\{ \frac{\partial^j u}{\partial y^j} \right\}_{j=0}^{[s - \frac{1}{p}]}$$

qui est définie pour $u \in \mathcal{D}(\bar{U})$, se prolonge par continuité en une application notée

$$u \rightarrow \gamma u = \left\{ \gamma_j u \right\}_{j=0}^{[s - \frac{1}{p}]}$$

qui est linéaire, continue surjective de $W^{s,p}(U)$ sur $\prod_{j=0}^{[s - \frac{1}{p}]} W^{s-j-\frac{1}{p},p}(\partial U)$,

dont le noyau est $W_0^{s,p}(U)$, lorsque U est un ouvert régulier, et n désignant la normale extérieure à ∂U .

Ce qui nous intéressera par la suite, ce sont les espaces $W^{s,p}(U)$ avec $s < 1$, et même $s < \frac{1}{2}$, donc seule la trace γ_0 nous intéressera.

1.6. Une inégalité de type L^p :

Nous allons d'abord donner un lemme qui donne une relation entre les normes dans les espaces $W^{s,p}$ et les semi-normes introduites dans la section 1.4.

Lemme 1.1.- Soit deux nombres positifs t et s tels que $t < s < 1$ K étant un compact, il existe une constante $C(K)$ telle que

$$(1.5) \quad \|u\|_{t,p}^p \leq C \left(\|u\|_{L^p}^p + |u|_{s,p}^p \right), \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Démonstration : Pour $u \in C_0^\infty(K)$, la norme $\|u\|_{t,p}$ est équivalente à

$$\left(\iint_{K \times B} \frac{|u(x+h) - u(x)|^p}{|h|^{n+pt}} dx dh + \|u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec B , boule de centre l'origine et de rayon ε . Utilisant le théorème de Fubini, nous obtenons :

$$\iint_{K \times B} \frac{|u(x+h) - u(x)|^p}{|h|^{n+pt}} dx dh = \int_{|h| < \varepsilon} \frac{1}{|h|^{n+p(t-s)}} dh \int_K \frac{|u(x+h) - u(x)|^p}{|h|^{ps}} dx$$

Il suffit alors de remarquer que nous avons les deux inégalités :

$$\int_K \frac{|u(x+h) - u(x)|}{|h|^{ps}} dx \leq C \sup_{0 < |h| < \varepsilon} |h|^{-ps} \|u_h - u\|_{L^p}^p = C(|u|_{p,s})^p$$

$$\int_{|h| < \varepsilon} \frac{1}{|h|^{n+p(t-s)}} dh = C < +\infty \quad \text{puisque } t < s.$$

L'inégalité (1.5) nous montre que pour estimer $\|u\|_{t,p}$, il suffit d'estimer la quantité $|u|_{p,s}$ pour $u \in C_0^\infty(K)$.

Avant de donner une estimation de $|u|_{p,s}$ pour $u \in C_0^\infty(K)$ nous introduisons certaines notations :

Soit $T(0)$ l'ensemble des champs de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans 0 . A chaque champ X_i du système $\{X_1, \dots, X_r\}$

nous associons un nombre s_j avec $s_j \in]0,1]$, si I est un multi-indice $I = (i_1, \dots, i_k)$ $i_j \in \{1, \dots, r\}$; on désigne par $s(I)$ le nombre défini par $\frac{1}{s(I)} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{s_{i_j}}$. Soit $T^s(0)$ le $C^\infty(0, \mathbb{R})$ sous module de $T(0)$ engendré par les champs de vecteurs X_I tels que $s(I) \geq s$. Alors nous avons le :

Théorème 1.1. : supposons qu'il existe un nombre positif s tel que $T^s(0) = T(0)$. Alors, pour tout compact $K \subset 0$, il existe une constante $C(K)$ telle que :

$$(1.6) \quad |u|_{s,p} \leq C \left(\sum_1^r |u|_{s_j X_j, p} + \|u\|_{L^p} \right) \quad u \in C_0^\infty(K) .$$

Démonstration : la démonstration est analogue à celle de Hormander dans le cas $p = 2$ [7], (voir appendice).

Corollaire 1.1.: soit K un compact de 0 . Si le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ vérifie l'hypothèse (H.0), il existe un nombre positif t et une constante C tels que :

$$(1.7) \quad \|u\|_{t,p} \leq C \left(\|u\|_{L^p} + \sum_1^r \|X_j u\|_{L^p} \right) \quad u \in C_0^\infty(K)$$

Démonstration : l'hypothèse (H.0) entraîne l'existence d'un nombre positif s tel que $T^s(0) = T(0)$. Par suite nous avons l'inégalité (1.6). Soit alors un nombre positif t tel que $t < s$; en combinant les inégalités (1.5) et (1.6) nous obtenons :

$$(1.8) \quad \|u\|_{t,p} \leq C \left(\|u\|_{L^p} + \sum_1^r |u|_{s_j X_j, p} \right)$$

choisissons alors $s_j = 1 \quad j \in \{1, \dots, r\}$; il nous suffit maintenant de remarquer que nous avons les inégalités

$$(1.9) \quad |u|_{1, X_j, p} \leq C \|X_j u\|_{L^p} \quad u \in C_0^\infty(K) \quad j = 1 \dots r$$

(1.7) découle de (1.8) et (1.9).

2. Application à un problème non linéaire :

Nous allons appliquer l'inégalité (1.7) à un problème aux limites non linéaire.

2.1. Le problème : Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{X_1, \dots, X_r\}$ un système de champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse (H.0). Soit d'autre part Ω un ouvert borné tel que :

- a) $\bar{\Omega} \subset O$
- b) $\Gamma = \partial\Omega$ est une variété de classe C^∞ de dimension $(n - 1)$.
- c) Ω est localement situé d'un même côté de Γ .

Considérons l'opérateur différentiel non linéaire suivant :

$$P u = \sum_1^r (\alpha_j - X_j) (|X_j u|^{p-2} X_j u) + |u|^{p-2} u, \quad p \geq 2$$

$\alpha_j - X_j$ désignant l'opérateur adjoint de X_j ; $\alpha_j \in C^\infty(O, \mathbb{R})$

P généralise sensiblement l'opérateur différentiel suivant, que l'on rencontre comme exemple dans [12] :

$$Qu = - \sum_1^n \frac{\partial}{\partial X_i} (|\frac{\partial u}{\partial X_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial X_i}) + |u|^{p-2} u$$

Nous voulons résoudre le problème de Dirichlet pour l'opérateur P et l'ouvert Ω : nous cherchons des solutions de l'équation

$$(2.1) \quad \begin{cases} Pu = f & f \text{ donnée dans un certain espace.} \\ u = g & \text{sur } \Gamma \quad g \text{ donnée, convenable.} \end{cases}$$

Pour étudier le problème (2.1), nous commencerons par étudier le problème :

$$(2.2) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

2.2. Hypothèses - Espaces fonctionnels :

Nous désignons par $M_p(\Omega)$ l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telles que : $u \in L^p(\Omega)$; $X_j u \in L^p(\Omega)$ $j = 1, \dots, r$. Muni de la norme

$$\|u\|_{M_p} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{j=1}^r \|X_j u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad M_p(\Omega) \text{ est un espace de Banach. La}$$

fermeture $\mathcal{K}_p(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M_p(\Omega)$ est également un espace de Banach, muni de la norme induite par $M_p(\Omega)$; il en est de même de $\mathcal{K}'_p(\Omega)$, qui est le dual topologique de $\mathcal{K}_p(\Omega)$. Alors $\mathcal{K}'_p(\Omega)$ est un espace de distributions ; et la norme dans $\mathcal{K}'_p(\Omega)$ est donnée par :

$$\|f\|_{\mathcal{K}'_p(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathcal{K}_p(\Omega)}}$$

Maintenant nous allons restreindre les valeurs de p , pour pouvoir résoudre le problème (2.2). Pour cela nous avons le :

Lemme 2.1. : Soit t le nombre positif du corollaire (1.1). Choisissons p tel que $p > \frac{1}{t}$. Alors nous avons l'inclusion algébrique et topologique

$$(2.3) \quad \mathcal{K}_p(\Omega) \subset W_0^{t,p}(\Omega)$$

Démonstration : Ω étant borné, posons $K = \overline{\Omega} \subset 0$

D'après le corollaire (1.1) nous avons en particulier

$$(2.4) \quad \|u\|_{t,p} \leq C \left(\|u\|_{L^p} + \sum_1^r \|X_j u\|_{L^p} \right) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$W_0^{t,p}(\Omega)$ désignant la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{t,p}(\Omega)$ et $\mathcal{K}_p(\Omega)$ celle de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M_p(\Omega)$, l'inégalité (2.4) entraîne (2.3).

Corollaire 2.1 : Les fonctions de $\mathcal{K}_p(\Omega)$ admettent des traces nulles sur $\Gamma = \partial\Omega$ pour $p > \frac{1}{t}$.

Démonstration : cela vient de l'inclusion (2.3) et du théorème de traces rappelé dans ce chapitre section 1.5.

Remarque 2.1. : Le nombre t qui apparaît dans le corollaire (1.1) est toujours inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. En effet le seul cas où $t > \frac{1}{2}$ correspond au cas où les champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ engendrent $\mathbb{R}^n$, ce qui ne nous intéresse pas. Pour $p = 2$, H^t n'admet pas de traces. D'où l'intérêt d'avoir l'inégalité (1.7) pour $p > 2$.

2.3. Un théorème d'isomorphisme :

Notre but est de montrer que P donné par :

$$Pu = \sum_1^r (\alpha_j - X_j) (|X_j u|^{p-2} X_j u) + |u|^{p-2} u$$

est un isomorphisme de $\mathcal{K}_p(\Omega)$ sur $\mathcal{K}'_p(\Omega)$. Si nous prenons $p > \frac{1}{t}$ et $f \in \mathcal{K}'_p(\Omega)$ le problème homogène (2.2) sera ainsi résolu. Nous allons donner d'abord une définition et un théorème d'isomorphisme.

Définition : Soit $\varphi(x)$ une application de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

$$\varphi(0) = 0$$

$\varphi(x)$ est croissante.

Soit R un opérateur d'un espace de Banach E dans son dual E' . Nous dirons que R est l'application de dualité relative à la fonction $\varphi(x)$ si :

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle Ru, u \rangle_{E' \times E} = \|Ru\|_{E'} , \quad \|u\|_E \\ \|Ru\|_{E'} = \varphi(\|u\|_E) \end{array} \right.$$

Nous dirons que R est une application de dualité de E dans E' s'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, φ croissante telle que (2.5) soit vérifiée.

Théorème [4] : Soit E un espace de Banach reflexif et strictement convexe. Supposons que son dual E' soit reflexif et strictement convexe. Soit R une application de dualité de E dans E' . Alors R est un isomorphisme de E sur E' .

Nous allons appliquer le théorème précédent pour montrer le :

Théorème 2.1 : L'opérateur P défini par

$$Pu = \sum_1^r (\alpha_j - x_j) (|x_j u|^{p-2} x_j u) + |u|^{p-2} u$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}_p(\Omega)$ sur $\mathcal{H}'_p(\Omega)$, $\mathcal{H}_p(\Omega)$ et $\mathcal{H}'_p(\Omega)$ étant définis dans 2.2.

Démonstration : Remarquons d'abord que les espaces $\mathcal{H}_p(\Omega)$ et $\mathcal{H}_p'(\Omega)$

sont des espaces uniformément convexes : cela découle aisément du fait

que les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces uniformément convexes. Il s'en

suit en particulier que $\mathcal{H}_p(\Omega)$ et $\mathcal{H}_p'(\Omega)$ sont réflexifs et strictement

convexes. Il ne nous reste plus qu'à montrer que P est une application

de dualité de $\mathcal{H}_p(\Omega)$ dans $\mathcal{H}_p'(\Omega)$. Plus précisément nous allons montrer

que P est l'application de dualité relative à la fonction $\Phi(X) = x^{p-1}$;

on a bien $\phi(0) = 0$ et ϕ croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Soit $u \in \mathcal{H}_p(\Omega)$;

alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons :

$$\langle Pu, \varphi \rangle_{\mathcal{H}_p'(\Omega) \times \mathcal{H}_p(\Omega)} = \sum_{j=1}^r \int_{\Omega} |X_j u|^{p-2} X_j u \overline{X_j \varphi} dx + \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \overline{\varphi} dx$$

Appliquant l'inégalité de Holder nous obtenons :

$$\|Pu\|_{\mathcal{H}_p'(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{\langle Pu, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)}} \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} + \sum_{j=1}^r \left(\int_{\Omega} |X_j u|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Nous en tirons facilement

$$\|Pu\|_{\mathcal{H}_p'(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)}^{p-1} = \Phi(\|u\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)})$$

Mais d'autre part on voit facilement que l'on a :

$$\langle Pu, u \rangle_{\mathcal{H}_p'(\Omega) \times \mathcal{H}_p(\Omega)} = \|u\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)}^p$$

Donc nous avons bien :

$$(2.6) \quad \begin{cases} \|Pu\|_{\mathcal{H}_p'(\Omega)} = \Phi(\|u\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)}) \\ \langle Pu, u \rangle_{\mathcal{H}_p'(\Omega) \times \mathcal{H}_p(\Omega)} = \|Pu\|_{\mathcal{H}_p'(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{H}_p(\Omega)} \end{cases}$$

Le théorème 2.1 est ainsi démontré :

Théorème 2.1. bis : Supposons $p > \frac{1}{t}$ (t introduit dans le corollaire 1.1).
Soient $f \in \mathcal{M}'_p(\Omega)$ et $g \in W^{1-\frac{1}{p}, p}(\Gamma)$. Il existe une fonction u unique
dans $\mathcal{M}_p(\Omega) + W^{1,p}(\Omega)$, telle que :

$$(2.7) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases} ; \quad P_1 u = \sum_{j=1}^r (x_j - X_j) (|X_j u|^{p-2} X_j u) + |u|^{p-2} u$$

Démonstration : soit $\tilde{g}$ un relèvement de g dans $W^{1,p}(\Omega)$. Considérons l'opérateur P_1 défini par :

$$P_1(u) = P(u + \tilde{g}) .$$

Puisque g est dans $W^{1,p}(\Omega)$, P_1 est un opérateur de $\mathcal{M}_p(\Omega)$ dans $\mathcal{M}'_p(\Omega)$. Comme P est un opérateur monotone, hemi-continu borné et coercif, il en est de même de P_1 . D'après un théorème de [], étant donné $f \in \mathcal{M}'_p(\Omega)$, il existe une fonction u , de $\mathcal{M}_p(\Omega)$ telle que $P_1 u = f$.
 Posons $v = u + \tilde{g}$. Nous en déduisons

$$(2.8) \quad \begin{cases} v \in \mathcal{M}_p(\Omega) + W^{1,p}(\Omega) \\ P v = P_1(u) = f \\ u = \tilde{g} \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

Donc v est solution de notre problème. Nous allons montrer que v , vérifiant (2.8) est unique. Soient v_1 et v_2 deux fonctions vérifiant (2.8). Donc :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 + \tilde{g}_1 & u_1 \in \mathcal{M}_p(\Omega) & \tilde{g}_1 \in W^{1,p}(\Omega) \\ v_2 = u_2 + \tilde{g}_2 & u_2 \in \mathcal{M}_p(\Omega) & \tilde{g}_2 \in W^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

$$\langle Pv_1 - Pv_2, v_1 - v_2 \rangle_{\mathcal{M}_p(\Omega) \times \mathcal{M}_p(\Omega)} = 0$$

$$\text{Comme } v_1 - v_2 \in \mathcal{M}_p(\Omega) \quad \text{car } v_1 - v_2 = u_1 - u_2 + \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 \in \mathcal{M}_p +$$

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{M}_p(\Omega)$$

$$\begin{aligned} \langle Pv_1 - Pv_2, v_1 - v_2 \rangle &= \sum_1^r \int_{\Omega} (|X_{j,v_1}|^{p-2} X_{j,v_1} - |X_{j,v_2}|^{p-2} X_{j,v_2})(X_{j,v_1} - X_{j,v_2}) \\ &\quad + \int_{\Omega} (|v_1|^{p-2} v_1 - |v_2|^{p-2} v_2)(v_1 - v_2) = 0 \end{aligned}$$

Comme chacun des termes dans la somme est positif ou nul, il s'en suit que $v_1 = v_2$ presque partout.

2.4. Exemple :

$$\text{Prenons } X_1 = x \frac{\partial}{\partial y} ; \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$$

Alors : $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. P s'écrit donc :

$$P = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - x \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| x \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{p-2} x \frac{\partial u}{\partial y} \right) + |u|^{p-2} u$$

Nous pouvons prendre tout nombre p tel que $p > 2$.

Remarque : Dans notre exemple, nous pouvons supprimer $|u|^{p-2} u$ car pour

$u \in \mathcal{D}(\Omega)$, Ω borné, nous avons

$$(2.9) \quad \|u\|_{L^p} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p}$$

Donc (2.9) est aussi vrai pour $u \in \mathcal{M}_p(\Omega)$.

CHAPITRE 2.

- : ; - : -

UN RESULTAT DE TRACES

1. Existence de traces :

1.1. Notations et définitions : Nous considérons, comme dans le chapitre 1, un système de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_r\}$ vérifiant l'hypothèse (H.O). Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière (i.e. $\Gamma = \partial\Omega$ est une variété de dimension $(n-1)$ de classe C^∞) tel que $\Omega \subset \mathbb{O}$. Considérons l'espace $M(\Omega)$, défini par :

$$M(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega) ; X_j u \in L^2(\Omega) ; j = 1, \dots, r\} .$$

Les fonctions de $M(\Omega)$ admettent-elles des traces sur Γ ? Nous pouvons aussi nous poser la question suivante, qui, si elle admet une réponse positive répond à la première question : Le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est-il presque partout transversal à Γ ? Précisons ces notions :

1.1. Définition : soit $x \in \Gamma$. Nous dirons qu'un champ de vecteurs X est transversal à Γ au point x si le vecteur $X(x)$ est transversal à Γ .

1.2. Définition : soit $x \in \Gamma$. Nous dirons que le système de champs de vecteurs $\{X_1, \dots, X_r\}$ est transversal à Γ en x , si parmi tous les vecteurs $X_1(x), \dots, X_r(x)$, il en existe au moins un qui soit transversal à Γ .

1.2. Transversalité à la frontière : Dans cette section nous allons montrer que si l'hypothèse (H.0) est vérifiée, alors le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est presque partout transversal à $\Gamma = \partial\Omega$ ($\bar{\Omega} \subset O$)

Théorème 1.1.- Soit $\{X_1, \dots, X_r\}$ un système de champs de vecteurs vérifiant l'hypothèse (H.0). Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ régulière, tel $\bar{\Omega} \subset O$. Désignons par E l'ensemble des points x appartenant à Γ tels que tous les vecteurs $X_1(x), \dots, X_r(x)$ sont tangents à Γ . Alors E est un ensemble fermé de mesure nulle dans Γ .

Le théorème 1.1 découlera du lemme suivant :

Lemme 1.1.- Soient deux champs de vecteurs X, Y à coefficients réels et de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$. Soit F l'ensemble des points x de Γ tels que :

- (i) les vecteurs $X(x)$ et $Y(x)$ sont tangents à Γ en x .
- (ii) le vecteur $[X, Y](x)$ est transversal à Γ en x .

Alors F est de mesure nulle dans Γ .

Remarque 1.1. : les ensembles négligeables étant invariants et la transversalité étant conservés par difféomorphisme, nous pouvons restreindre à travailler dans $\mathbb{R}_+^n$, en prenant pour Γ l'hyperplan $\{y = 0\}$, tout point de $\mathbb{R}_+^n$ étant noté (x, y) , $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y \in \mathbb{R}^+$. Comme Ω est un ouvert borné, nous pouvons supposer que ce sont les champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ et leurs crochets d'ordre au plus k ($k \in \mathbb{N}$) qui engendrent $\mathbb{R}^n$. Donc il nous suffit démontrer le théorème 1.1 dans ces conditions

Démonstration du lemme 2.1 (dans le cas $\mathbb{R}_+^n$) :

Ecrivons l'expression des champs de vecteurs X et Y

$$X = a \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

$$Y = b \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

a, b, a_i, b_i sont des fonctions réelles de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons chercher une condition équivalente aux conditions (i) et (ii) portant sur les fonctions a, b, a_i, b_i . Il est immédiat que la condition (i) est équivalente à : $a(x,0) = 0, b(x,0) = 0$.

Pour traduire la condition (ii) nous allons chercher le coefficient de l'opérateur normal $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression du champ $[X,Y]$. Un calcul élémentaire donne ce coefficient égal à :

$$a \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial b}{\partial X_i} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial a}{\partial X_i}$$

Dire que $[X,Y](x,0)$ est transversal à Γ est équivalent à :

$$(a \frac{\partial b}{\partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \frac{\partial b}{\partial X_i} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \frac{\partial a}{\partial X_i}) \neq 0$$

Tenant compte du fait que : $a(x,0) = b(x,0) = 0$ nous obtenons l'équivalence suivante :

$$(1.1) \quad x \in F \iff \begin{cases} a(x,0) = 0 \\ b(x,0) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i \frac{\partial b}{\partial X_i} - b_i \frac{\partial a}{\partial X_i}) \neq 0 \end{cases}$$

Soit x fixé dans F . La troisième condition contenu dans (2.1) nous montre

que :

$$(1.2) \{ \text{il existe un indice } j \text{ ou } k \text{ tel que } \frac{\partial a}{\partial X_j}(x,0) \neq 0 \text{ ou } \frac{\partial b}{\partial X_k}(x,0) \neq 0 \}$$

F est un ensemble mesurable : en effet nous voyons d'après (2.1) que F est l'intersection de deux fermés et d'un ouvert. Pour montrer qu'il est de mesure nulle, nous allons montrer que (1.1) et (1.2) entraîneront que F est contenu dans un ensemble de mesure nulle. Pour cela introduisons les ensembles suivants :

$$J_i = \{x \in \Gamma \mid a(x,0) = 0 \quad \frac{\partial a}{\partial X_i}(x,0) \neq 0\} \quad i=1, \dots, n-1$$

$$K_i = \{x \in \Gamma \mid b(x,0) = 0 \quad \frac{\partial b}{\partial X_i}(x,0) \neq 0\}$$

Alors nous voyons que (2.2) entraîne l'inclusion suivante :

$$(1.3) \quad F \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} J_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \right)$$

Les ensembles J_i et K_i sont mesurables : en effet chacun est intersection d'un ouvert et d'un fermé. Il nous suffit de montrer que les ensembles J_i et K_i sont tous de mesure nulle. Montrons par exemple que J_1 est de mesure nulle :

Lemme 1.2. : L'ensemble J_1 des points $(x,0) \in \Gamma$ tels que $a(x,0) = 0$ et $\frac{\partial a}{\partial X_1}(x,0) \neq 0$ a une mesure nulle dans $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration : Pour tout $(n-2)$ uple $(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ fixé, associons l'ensemble $J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0) = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x = (x_1, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0) \in J_1\}$

$J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ est une section de J_1 . Notre but est de montrer que pour tout $(n-2)$ uple $(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ l'ensemble $J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et qui est évidemment mesurable, est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$, ce qui entraînera bien que J_1 est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

Définissons la fonction d'une variable $\tilde{a}(x_1)$ par :

$$\tilde{a}(x_1) = a(x_1, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, 0) ; \text{ il est immédiat que}$$

$$(1.4) \quad J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0) = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid \tilde{a}(x_1) = 0 \quad \tilde{a}'(x_1) \neq 0\}$$

$\tilde{a}'$ désignant la dérivée de $\tilde{a}$. Alors nous voyons, en regardant (1.4) que tout point $x_1 \in J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ admet un intervalle ouvert ω_{x_1} contenant x_1 dans lequel $\tilde{a}$ ne s'annule qu'au point x_1 lui-même. Ainsi $J_1(x_2^0, \dots, x_{n-1}^0)$ est un ensemble dénombrable dans $\mathbb{R}$, donc de mesure nulle.

Le lemme (2.1) est ainsi entièrement démontré. Nous allons montrer que le théorème (2.1) découle aisément du lemme (2.1), ce que nous faisons en nous plaçant dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ et $\Gamma = \{y = 0\}$.

Démonstration du théorème 1.1 : Nous avons déjà remarqué (remarque 1.1) que Ω étant borné, nous pouvons supposer que ce sont les champs $X_1, \dots, X_r$ et leurs crochets d'ordres au plus égaux à k qui engendrent $\mathbb{R}^n$ en tout point de $\mathbb{R}^n$. Nous procèderons par récurrence.

a) cas où $X_1, \dots, X_r$ et les crochets $X_I(I) = 2$ engendrent $\mathbb{R}^n$:

Nous rappelons (chapitre 1) que si I est un multi-indice

$I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_j \in \{1, \dots, r\}$ alors $X_I = [X_{i_1}, [\dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}]]]$ et

$|I| = k = \text{longueur du crochet} = \text{nombre de champs } X_{i_j} \text{ figurant dans le cro-}$

chet. Plaçons nous donc maintenant dans le cas où les crochets X_I avec $|I| \leq 2$ (pour $|I| = 1$ X_I n'est autre qu'un des champs de vecteurs X_j), engendrent en tout point x un espace vectoriel de dimension n . Soit x_0 un point de E . Si nous désignons par $E_{i,j}$ l'ensemble des points x tels que :

$\alpha)$ les vecteurs $X_i(x)$ et $X_j(x)$ sont tangents à Γ en x

$\beta)$ le vecteur $[X_i, X_j](x)$ est transversal à Γ en x

alors il existe un couple (i,j) tel que $x_0 \in E_{i,j}$. En effet si ce n'était pas le cas tous les vecteurs $X_i(x)$ et $[X_j, X_t](x)$ seraient tangents à Γ en x_0 et donc n'engendreraient pas en x_0 un espace vectoriel de dimension n , ce qui est contraire à l'hypothèse du cas $a)$.

Donc nous avons :

$$(1.5) \quad E \subset \bigcup_{i,j=1}^r E_{i,j}.$$

D'après le lemme (1.1) tous les ensembles $E_{i,j}$ sont de mesure nulle dans Γ . Il s'en suit que E , qui est un ensemble fermé, donc mesurable, est de mesure nulle dans Γ .

b) cas général : nous savons qu'il existe un entier k tel que les champs de vecteurs X_I avec $|I| \leq k$ engendrent en tout point un espace vectoriel de dimension n . Nous allons diviser E en les ensembles suivants

$$E_1 = \{x \in E \mid \text{il existe } I \text{ avec } |I| = 1 \text{ tel que } X_I(x) \text{ transversal à } \Gamma \text{ en } x\}$$

•
•
•
•

$$E_j = \{x \in E \mid X_I(x) \text{ tangent à } \Gamma \text{ pour tout } I \text{ tel que } |I| \leq j-1$$

et il existe I_0 tel que $|I_0| = j$ et $X_{I_0}(x)$ transversal à Γ en $x\}$

$E_k = \{x \in E \mid X_I(x) \text{ tangent à } \Gamma \text{ pour tout } I \text{ tel que } |I| \leq k-1$
 et il existe un indice I_0 t.q. $|I_0| = k$ et $X_{I_0}(x)$ transversal à
 Γ en $x\}$.

Il est immédiat que nous avons :

$$(1.6) \quad E \subset \bigcup_1^k E_j$$

Il nous suffit alors de montrer que E_j est de mesure nulle, $j = 1, \dots, k$
 considérons donc E_j . Pour tout multi-indice I tel que $|I| \leq j-1$, les
 vecteurs $X_I(x)$ sont tangents à Γ en x pour $x \in E_j$. Il y a un nombre
 fini de tels champs de vecteurs : numérotons les et appelons les $y_1, \dots, y_\alpha$
 $\alpha \in \mathbb{N}$. Comme les crochets d'ordre j des champs $X_1, \dots, X_r$, sont les
 crochets d'ordre inférieur ou égal à un des champs $y_1, \dots, y_\alpha$, nous
 voyons, d'après la définition de E_j , qu'en tout point x de E_j un cro-
 chet d'ordre 1 des champs $y_1 \dots y_\alpha$ est transversal à Γ . Nous sommes
 ainsi ramenés au cas a). Donc E_j est de mesure nulle dans Γ .

Le théorème 1.1 est ainsi entièrement démontré.

1.3. Existence de traces : nous démontrons essentiellement le :

Théorème 1.2. : supposons les hypothèses du théorème 1.1 vérifiées. Alors
les fonctions de $M(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid X_j u \in L^2(\Omega) \quad j = 1, \dots, r\}$ admettent
des traces sur $\partial\Omega = \Gamma$, qui sont des fonctions mesurables, dans Γ .

Démonstration : en utilisant les cartes locales, nous pouvons nous ramener
 à étudier le théorème dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ $\Gamma = \{y = 0\}$. Les hypothèses
 du théorème 1.1 entraînent que le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est presque par-
 tout transversal à $\Gamma = \mathbb{R}^{n-1}$. Nous avons appelé E l'ensemble des points

de Γ en lesquels le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ n'est pas transversal à Γ .
 D'autre part, comme Γ est compact, puisque Ω est borné, on peut se restreindre à prendre Γ comme un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$, soit par exemple la sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit $\varepsilon > 0$ aussi petit que l'on veut ; comme E est de mesure nulle dans Γ , il existe un ensemble fermé, donc compact, de Γ tel que la mesure du complémentaire de G dans Γ soit inférieure à ε et tel que le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ soit transversal à Γ en tout point de F . En utilisant des difféomorphismes tels que ceux qui seront introduits dans le chapitre 4 , qui seront en nombre fini, puisque F est compact, nous pouvons nous ramener à des fonctions u telles que

$$\begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \end{cases}$$

Or de telles fonctions admettent des traces sur $\mathbb{R}^{n-1}$, qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Revenant à notre ensemble F , nous trouvons que les fonctions $M(\Omega)$ admettent des traces sur F qui sont dans $L^2(F)$. Comme la mesure du complémentaire de F dans Γ est inférieure à ε , et que ε peut être aussi petit que l'on veut, les fonctions de $M(\Omega)$, admettent sur Γ des traces définies presque partout et qui sont mesurables dans Γ .

2. Etude du cas où l'espace est de dimension 2 :

Nous commencerons par une remarque :

2.1. Remarque :

En regardant la démonstration du lemme (1.1), on s'aperçoit que dans le cas où la dimension est égale à 2 , l'ensemble des points de Γ où

$\{X_1, \dots, X_r\}$ n'est pas transversal à Γ est en nombre fini. En effet, comme Γ est compact et que chaque point où le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ n'est pas transversal à Γ , admet un voisinage dans lequel le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ est transversal à Γ , excepté au point considéré, il en découle que E est fini.

2.2. Etude des crochets :

Considérons r champs de vecteurs $X_1, \dots, X_r$ vérifiant l'hypothèse $(H.R^2)$. Nous supposons comme dans tous nos raisonnements précédents qu'il existe un entier k tel que tous les champs de vecteurs X_I avec $|I| \leq k$, engendrent en tout point un espace de dimension 2. D'autre part, nous considérons que Γ est l'hyperplan $\{y = 0\}$, y étant la variable normale, tout point de la droite $y = 0$ sera noté x au lieu de $(x, 0)$. Nous donnons chaque champ X_j par

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x} \quad j = 1, \dots, r.$$

Lemme 2.1. : Le coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression de tout crochet X_I avec $|I| \leq p$ est de la forme :

$$(2.1) \quad A_I = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \alpha_{ij}(x, y) \frac{\partial^i a_j}{\partial x^i}(x, y)$$

Démonstration :

a) si $p = 0$, les champs de vecteurs X_I ne sont autres que les champs X_j et les coefficients de $\frac{\partial}{\partial y}$ sont les fonctions a_j qui sont bien de la forme (4.1), pour $p = 0$.

b) supposons que le lemme (4.1) est vrai pour $p-1$. Montrons-le pour p .

Tout crochet X_I avec $|I| \leq p$ s'obtient en faisant le crochet de X_j $j = 1, \dots, r$ d'un champ X_J avec $|J| \leq p - 1$.

Cherchons donc le coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression du champ X_I , en fonction de l'expression de X_J et de X_j

$$X_J = A_J \frac{\partial}{\partial y} + B_J \frac{\partial}{\partial x}$$

$$X_j = a_j \frac{\partial}{\partial y} + b_j \frac{\partial}{\partial x}$$

Le coefficient de $\frac{\partial}{\partial y}$ dans l'expression de X_I est égal à :

$$A_I = A_J \frac{\partial a_j}{\partial y} - a_j \frac{\partial A_J}{\partial y} + B_J \frac{\partial a_j}{\partial x} - b_j \frac{\partial A_J}{\partial x}$$

comme nous avons $|J| \leq p - 1$, et d'après l'hypothèse de récurrence

$$A_J = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^r \beta_{i_k}(x,y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x^i}(x,y)$$

D'où nous obtenons :

$$(2.2) \quad A_I = \left(\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^r \beta_{i_k}(x,y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x^i}(x,y) \right) \frac{\partial a_j}{\partial y} - a_j \frac{\partial A_J}{\partial y} + B_J \frac{\partial a_j}{\partial x} - b_j \frac{\partial A_J}{\partial x}$$

or :

$$(2.3) \quad \frac{\partial A_J}{\partial x} = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^r \frac{\partial \beta_{i_k}}{\partial x}(x,y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x^i}(x,y) + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^r \beta_{i_k}(x,y) \frac{\partial^{i+1} a_k}{\partial x^{i+1}}(x,y)$$

De (2.2) et (2.3) nous tirons

$$A_I = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^r \alpha_{i_k}(x,y) \frac{\partial^i a_k}{\partial x^i}(x,y).$$

Le lemme est ainsi montré.

Supposons le système $\{X_1, \dots, X_r\}$ non transversal à Γ au point $(0,0)$.

Corollaire 2.1.- il existe un entier $n \leq k$ et un indice $j, j \in \{1, \dots, r\}$

$$\frac{\partial^n a_j}{\partial x^n} (0,0) \neq 0 .$$

Démonstration :

Les crochets X_I avec $|I| \leq k$ engendrent l'espace $\mathbb{R}^2$. Donc en tout point de Γ , donc en $(0,0)$, il existe un champ de vecteurs X_I , $|I| \leq k$, transversal à Γ .

Dénnotant par X_I ce champ de vecteur, il s'en suit que :

$$A_I(0,0) \neq 0$$

Utilisant alors (2.1), nous voyons qu'il existe un entier $n < k$ et un indice $j \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\frac{\partial^n a_j}{\partial x^n} (0,0) \neq 0$.

2.3. Etudes des traces : nous allons montrer que les traces des fonctions u telles que :

$$(2.4) \quad \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \\ X_j u \in L^2(\mathbb{R}_+^2), \quad j = 1, \dots, r \end{cases}$$

qui ont été jusqu'ici définies comme fonctions mesurables peuvent être mieux précisées.

Dorénavant supposons que nous avons :

$$\frac{\partial^n a_j}{\partial x^n} (0,0) \neq 0 \quad \text{pour un } j \text{ bien fixé}$$

soit u vérifiant (2.4). Donc en particulier :

$$(2.5) \quad \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \\ a_j \frac{\partial u}{\partial y} + b_j \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \end{cases}$$

Restreignons-nous aussi au cas où u a son support dans un petit voisinage ω de $(0,0)$.

Soit $\theta(x,y)$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$a_j \frac{\partial \theta}{\partial y} + b_j \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 .$$

alors (θ, y) est un difféomorphisme de ω sur un petit ouvert ω' tel que $\gamma = \{y = 0\} \cap \omega$ reste invariant. De plus, par ce difféomorphisme u est transformée en une fonction v telle que

$$(2.6) \quad \begin{cases} v \in L^2(\omega') \\ a_j \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\omega') \end{cases}$$

ou encore :

$$(2.7) \quad \begin{cases} a_j v \in L^2(\omega') \\ \frac{\partial}{\partial y} (a_j v) \in L^2(\omega') \end{cases}$$

ce qui entraîne, puisque $\frac{\partial^n a_j}{\partial x^n} (0,0) \neq 0$, et en revenant à u .

$$(2.8) \quad \underline{x^n u(x,0) \in L^2(\gamma)} .$$

Remarque 2.3. : Un cas particulier est celui des fonctions u telles que

$$(4.10) \quad \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \\ \frac{x^n \partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \end{cases}$$

Dans ce cas on a $|x|^{\frac{n}{2}} u(x,0) \in L^2(\gamma)$. [2] .

Ici, il n'est pas d'une grande importance de savoir si $|x|^{\frac{n}{2}} u(x,0) \in L^2(\gamma)$, car on peut dire seulement qu'il existe un entier n tel que $x^n u(x,0) \in L^2(\gamma)$ l'existence de n important plus que la valeur de n .

CHAPITRE 3.

-:-:-

UNE INEGALITE FONDAMENTALE

-:-

1. Quelques lemmes préliminaires :

1.1. Définitions et notations : Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans une situation un peu différente de celle des chapitres précédents. Nous considérons un cylindre $\Omega = \omega \times I$ de $\mathbb{R}^n$, où ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n-1}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Tout point de Ω sera noté (x, y) ; $x \in \omega$, $y \in I$. D'autre part, considérons un système de champs de vecteurs où figure l'opérateur de dérivation normale $\frac{\partial}{\partial y} : \{\frac{\partial}{\partial y}, X_0, X_1, \dots, X_r\}$. Ce système est supposé tel qu'il vérifie l'hypothèse (H.0) avec $\bar{\Omega} \subset 0$.

Soit $M(\Omega)$ l'espace des distributions u de $\mathcal{D}'(\Omega)$ telles que $u \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega)$, $X_j u \in L^2(\Omega)$ $j = 1, \dots, r$, muni de la norme naturelle. L'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ est de fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M(\Omega)$ et $\mathcal{H}'(\Omega)$ le dual topologique de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Rappelons les notations suivantes, X étant un champ de vecteurs :

$$|u|_{X,s} = \sup_{0 < |t| < \varepsilon} \frac{\|e^{tX} u - u\|}{|t|^s} \quad u \in C_0^\infty(K)$$

$$|u|_s = \sup_{0 < |h| < \varepsilon} \frac{\|\tau_h u - u\|}{|h|^s}$$

$\|\cdot\|$ désignant la norme de L^2 .

Comme $\bar{\Omega}$ est un compact de O , alors nous avons l'inégalité suivante due à Hormander [7] :

$s_0, s_y, s_1, \dots, s_r$ étant des nombres positifs et inférieurs ou égaux à 1, il existe un nombre $s > 0$ et une constante C tels que :

$$(1.1) \quad |u|_s \leq C \left(\sum_0^r |u|_{X_j, s_j} + |u|_{\frac{\partial}{\partial y}, s_y} + \|u\| \right) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2. Un lemme préliminaire : l'inégalité (1.1) ne nous permettra pas de montrer la régularité des solutions pour un problème aux limites. Cependant nous pourrions la modifier et obtenir une inégalité qui sera une estimation à la frontière. Pour cela introduisons les composantes tangentielles $y_0, y_1, \dots, y_r$ de champs de vecteurs $X_0, X_1, \dots, X_r$. Nous allons, pour montrer que (1.1) est valable en remplaçant les champs $X_0, X_1, \dots, X_r$ par leurs composantes tangentielles, démontrer que le système

$\{y_0, \frac{\partial}{\partial y}, y_1, \dots, y_r\}$ vérifie (H.0). Tout champ X de vecteurs, s'écrivant $X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + y_j$, on appellera y_j la composante tangentielle du champ X_j .

Lemme 1.1 : soient $y_0, y_1, \dots, y_r$, les composantes tangentielles des champs de vecteurs $X_0, X_1, \dots, X_r$. Alors nous avons l'implication

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y}, X_0, X_1, \dots, X_r \right\} \in (H.0) \implies \left\{ \frac{\partial}{\partial y}, y_0, \dots, y_r \right\} \in (H.0)$$

Démonstration : Pour cela il nous suffit de montrer que tout crochet d'ordre

p formé avec les champs du système $\{\frac{\partial}{\partial y}, y_0, \dots, y_r\}$ s'exprime comme somme finie, à coefficients de classe C^∞ dans O , de crochets d'ordre inférieur ou égal à p formés avec les champs $\{\frac{\partial}{\partial y}, y_0, \dots, y_r\}$. Cette propriété est vraie pour les crochets d'ordre zéro car $X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + y_j$.

Supposons qu'elle est vraie pour $p - 1$, montrons qu'elle est vraie pour p . Soit donc un crochet $X_I = [X_J, X_j]$ avec $|I| = p$, $|J| = p - 1$, et $X_J = \sum \alpha_{J,K}^k X_K$ ou X_K est un crochet formé avec les champs $\{\frac{\partial}{\partial y}, y_0, \dots, y_r\}$. Alors il nous suffit de montrer que $[X_K, X_j]$ est un crochet d'ordre $\leq p$ formé avec les mêmes champs. Comme $X_j = \alpha_j \frac{\partial}{\partial y} + y_j$ nous avons

$$[X_K, X_j] = [X_K, \alpha_j \frac{\partial}{\partial y}] + [X_K, y_j].$$

Nous voyons alors que le lemme est immédiat.

1.3. Quelques opérateurs régularisants : L'inégalité (1.1) est valable en remplaçant les opérateurs X_j par les opérateurs y_j $j = 0, 1, \dots, r$ d'après le lemme 1.1. Nous obtenons ainsi :

$$(1.2) \quad |u|_s \leq C \left(\sum_0^r |u|_{y_j, s_j} + |u|_{\frac{\partial}{\partial y}, s_y} + \|u\| \right) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Prenant $s_y = s_1 = s_r = 1$ et $s_0 = \frac{1}{2}$, et remarquant que nous avons les majorations

$$|u|_{\frac{\partial}{\partial y}, 1} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \quad \text{et} \quad |u|_{y_j, 1} \leq C \|y_j u\|_{L^2} \quad j = 1, \dots, r$$

(1.2) devient

$$(1.3) \quad |u|_s \leq C \left(\|u\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| + \sum_1^r \|y_j u\| + |u|_{y_0, \frac{1}{2}} \right) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Par suite il nous reste à estimer $|u|_{y_0, \frac{1}{2}}$. Nous allons montrer que, étant donné un compact K contenu dans ω , alors nous avons la majoration

$$(1.4) \quad |u|_{y_0, \frac{1}{2}} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \quad u \in C_0^\infty(K \times \mathbb{I})$$

si $I = (i_1, \dots, i_k)$ est un multi-indice, rappelons la notation :

$$X_I = \text{ad } X_{i_1} \dots \text{ad } X_{i_{k-1}} X_{i_k} \frac{1}{s(I)} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{s_{i_j}} .$$

Dans notre cas $s_{ij} = 1$ si $i_j \neq 0$ $s_{ij} = \frac{1}{2}$ si $s_{ij} = 0$.

Pour tout champ de vecteur X de classe C^∞ et tangentiel, définissons :

$$\varphi_X u = \int e^{zX} u \varphi(r) dr \quad \text{avec} \quad \varphi \in C_0^\infty(-k, k) \quad k \text{ petit nous avons}$$

les estimations suivantes :

$$X \varphi_X u = \int (u - e^{rX} u) \varphi'(r) dr$$

$$\|X \varphi_X u\| \leq \int |d\varphi| \sup_{|\tau| < k} \|e^{rX} u - u\|$$

$$\|\varphi_X u - u\| \leq \sup_{|r| < k} \|e^{rX} u - u\| \text{ si } \varphi \geq 0 \text{ et } \int \varphi dx = 1 .$$

Il convient de remarquer que φ_X est un opérateur régularisant suivant les caractéristiques du champ X .

Maintenant $\Phi(h)$ étant une fonction dans $C_0^\infty(B)$ où B est la boule unité de $\mathbb{R}^{n-1}$, posons

$$\Phi_\varepsilon u = \int u(x - \varepsilon h, y) \Phi(h) dh = \Phi_\varepsilon u(x, y) .$$

Alors pour $j = 1, \dots, n-1$, nous avons les majorations

$$\varepsilon \|D_j \Phi_\varepsilon u\| \leq \int |D_j \Phi| \sup_{|h| < k} \|u(x - \varepsilon h, y) - u(x, y)\|$$

$$\|\Phi_\varepsilon u - u\| \leq \sup_{|h| < k} \|u(x - \varepsilon h, y) - u(x, y)\| \text{ si } \Phi \geq 0 \text{ et } \int \Phi dx = 1 .$$

De plus remarquons que $\frac{\partial}{\partial y}$ et Φ_ε commutent. D'autre part, d'après le lemme de Friedrich [8]

$$\| (X_{\varphi_\varepsilon} - \varphi_\varepsilon X)u \| \leq C \| u \| \quad u \in C_0^\infty(K \times I) \text{ X tangentiel}$$

Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des multi-indices tels que :

$$|I| < m(I) = \frac{1}{s(I)} < 2 |I| \quad .$$

Cette dernière condition exprime le fait que le crochet X_I contient aussi bien y_0 qu'un des champs $\frac{\partial}{\partial y}$, $y_1, \dots, y_r$. Ordonnons l'ensemble $\mathcal{J}$ de sorte que $m(I) = \frac{1}{s(I)}$ soit une fonction croissante de $I \in \mathcal{J}$. Posons :

$$S_t^\sigma u = \prod_{i \in \mathcal{J}} \varphi_t^{m(I)} y_I \Phi_{t \frac{1}{\sigma}} u \quad \sigma > 0$$

$$S_t^J u = \prod_{I \gg J} \varphi_t^{m(I)} y_I \Phi_{t \frac{1}{\sigma}} u \quad J \in \mathcal{J}$$

Ces notations étant données, il nous paraît inutile de réécrire tous les lemmes qui se trouvent dans [7]. Mais nous allons mettre en évidence la différence essentielle qui existe avec la démonstration de [7].

2. L'inégalité fondamentale :

Théorème 2.1 : soit K un compact de $\mathbb{R}^{n-1}$ avec $K \subset \omega$. Si le système

$\{X_0, \frac{\partial}{\partial y}, X_1, \dots, X_r\}$ vérifie l'hypothèse (H.0) avec $0 \in \Omega$; $\Omega = \omega \times I$,
il existe un nombre positif t et une constante C tels que :

$$(2.1) \quad \|u\|_t \leq C (\|u\| + \|\frac{\partial u}{\partial y}\| + \sum_{j=1}^r \|X_j u\| + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

Remarque 2.1 : Il convient de noter la différence avec l'inégalité donnée dans [7]. Dans cette dernière, Hormander considérerait la norme

$\|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(0)}$ avec $u \in C_0^\infty(K)$ K compact de 0 . (2.1) est une estimation

à la frontière dans ce cas particulier d'un cylindre $\Omega = \omega \times I$ et d'un système de champs de vecteurs où figure l'opérateur $\frac{\partial}{\partial y}$.

Le théorème (2.1) découlera des lemmes et proposition suivante :

Lemme 2.1 : soit $u \in C_0^\infty(K \times I)$. Alors pour t assez petit ($|t| < t_0$) les fonctions $S_t u$ et $S_t^J u$ sont dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Démonstration : Le lemme 2.1 sera établi si nous montrons que, pour $I \in \mathcal{J}$, tout champ de vecteurs Y_I est tangentiel : en effet e^{rY_I} étant une petite translation tangentielle, si Y_I est tangentiel, le lemme en découlera.

Mais pour $I \in \mathcal{J}$, Y_I contient au moins une fois le champ y_0 , c'est-à-dire un champ tangentiel. Comme le crochet de deux champs de vecteurs tangentiels est tangentiel et que le crochet d'un champ tangentiel et du champ $\frac{\partial}{\partial y}$ est tangentiel le lemme 2.1 est établi.

Lemme 2.2 : L'inégalité suivante :

$$(2.2) \quad \|u\|_t \leq C \left(\|u\| + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| + \sum_1^r \|y_j u\| + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \right) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

entraîne l'inégalité (2.1) :

Démonstration : le lemme (2.2) dénote des inégalités suivantes qui sont évidentes

$$(i) \quad \|y_j u\| \leq C \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| + \|X_j u\| \right) \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

$$(ii) \quad \|y_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \right)$$

L'inégalité (2.2) montre que l'inégalité (2.1) est vraie si on montre la

Proposition 2.1 : supposons les hypothèses du théorème 2.1 vérifiées. Pour tout compact K contenu dans ω , il existe un nombre positif t et une constante C tels que :

$$(4.2) \quad \|u\|_t \leq C(\|u\| + \|\frac{\partial u}{\partial y}\| + \sum_1^r \|y_j u\| + \|y_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}) \quad u \in C_0^\infty(K \times I).$$

Démonstration : si nous regardons la démonstration [7], la seule difficulté est l'estimation de l'expression

$$(y_0 u, (e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u)) \quad r \leq t^2 \quad t \text{ petit}.$$

D'après le lemme 2.1, $e^{ry_0} S_t u - S_t u$ est dans $\mathcal{D}(\Omega)$, si u est dans $C_0^\infty(K \times I)$.

Comme $(e^{ry_0})^* = -A_0 e^{-ry_0}$ où A_0 est le Jacobien de la translation e^{ry_0} , comme $(e^{ry_I})^* = -A_I e^{-ry_I}$ et comme e^{-ry_I} est une translation tangentielle nous avons aussi :

$$(2.3) \quad (e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u) \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{si} \quad u \in C_0^\infty(K \times I)$$

Grâce à (2.3) nous avons l'inégalité

$$(2.4) \quad |(y_0 u, (e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u))| \leq C \|y_0 u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \|(e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u)\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

la majoration de $\|(e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u)\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$ est faite comme dans [7].

Remarque 2.2 : Nous voyons que le plus important est l'appartenance de

$$(e^{ry_0} S_t)^* (e^{ry_0} S_t u - S_t u) \quad \text{à} \quad \mathcal{D}(\Omega), \quad \text{sinon dans le second membre de (2.4)}$$

apparaîtrait $\|y_0 u\|_{\mathcal{H}'(0)}$ où 0 est un ouvert contenant $\bar{\Omega}$, ce qui ne donnerait pas l'estimation désirée.

CHAPITRE 4.

- 1. -

EXISTENCE - UNICITE - REGULARITE DES SOLUTIONS

- 1. -

1. Existence et Unicité des Solutions1.1. Notations - Espaces fonctionnels - Hypothèses

$\{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ étant un système de champs de vecteurs à coefficients réels et de classe C^∞ dans un ouvert O , notre problème est de montrer l'existence, l'unicité et la régularité des solutions de l'équation :

$$(1.1) \quad \begin{cases} Pu = \sum_{j=1}^r X_j^2 u + X_0 u + \lambda u = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

Ω étant un ouvert régulier tel que $\overline{\Omega} \subset O$, moyennant certaines hypothèses.

Nous supposons que :

a) Ω est un ouvert borné tel que $\overline{\Omega} \subset O$, et $\Gamma = \partial\Omega$ est une variété de classe C^∞ et de dimension $(n-1)$. De plus Ω est localement situé d'un même côté de Γ .

b) le système $\{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ vérifie l'hypothèse (H.O).

c) Hypothèse (H. Γ) : pour tout point $x \in \Gamma$, il existe un indice j_x ,

$j_x \in \{1, \dots, r\}$ tel que le vecteur $X_{j_x}(x)$ soit transversal à Γ .

Remarquons alors que, puisque les champs X_j sont de classe C^∞ dans O , il existe un voisinage ω_x de x , dans $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout $y \in \omega_x \cap \Gamma$ le vecteur $X_{j_x}(y)$ soit transversal à Γ .

d) Hypothèse (H. λ) : si $a_j - X_j$ désigne l'opérateur adjoint de X_j nous supposons :

$$-\operatorname{Re} \lambda > -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r (X_j a_j - a_j^2) + \frac{a_0}{2} \quad \text{sur } \overline{\Omega}$$

Maintenant nous allons introduire certains espaces :

Nous désignons par $M(\Omega)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, telles que $u \in L^2(\Omega)$, $X_j u \in L^2(\Omega)$ $j = 1, \dots, r$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{M(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^r (X_j u, X_j v)_{L^2(\Omega)}$$

Si $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $M(\Omega)$, $\mathcal{M}'(\Omega)$ sera son dual topologique. Tous ces espaces sont des espaces de Hilbert.

La norme dans $\mathcal{M}'(\Omega)$ est donnée par

$$(1.2) \quad \|f\|_{\mathcal{M}'(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \frac{|(f, \varphi)|}{\|\varphi\|_{\mathcal{M}(\Omega)}}$$

Le produit scalaire dans $\mathcal{M}'(\Omega)$ peut être défini ainsi ; soit J l'isomorphisme canonique de $\mathcal{M}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}'(\Omega)$; soient $u, v \in \mathcal{M}'(\Omega)$ et $u_0, v_0 \in \mathcal{M}(\Omega)$ tels que $u = Ju_0$ $v = Jv_0$ alors

$$(1.3) \quad \begin{cases} (u, v)_{\mathcal{M}'(\Omega)} = (u_0, v_0)_{\mathcal{M}(\Omega)} \\ \|u\|_{\mathcal{M}'(\Omega)}^2 = \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)}^2 \end{cases}$$

Il convient de noter que les normes (1.2) et (1.3) sont les mêmes.

Introduisons les espaces suivants qui nous seront utiles :

$\mathcal{P}(\Omega) = \{u \in \mathcal{H}(\Omega) \mid X_0 u \in \mathcal{H}'(\Omega)\}$; $\mathcal{P}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

$N(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid X_j u \in L^2(\Omega) \quad j = 1 \dots r \mid X_0 u \in \mathcal{H}'(\Omega)\}$

$\mathcal{N}(\Omega)$ sera la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $N(\Omega)$, celui-ci étant muni de la norme naturelle :

$$\|u\|_{N(\Omega)}^2 = \|u\|_{M(\Omega)}^2 + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2$$

1.2. Le problème :

Nous cherchons des solutions du problème de Dirichlet

$$(1.4) \quad \begin{cases} Pu = f & f \in \mathcal{H}'(\Omega) \\ u|_{\Gamma} = 0 & g \text{ donnée sur } \Gamma \end{cases}$$

Pour cela, comme dans le cas elliptique traité par la méthode variationnelle

nous commencerons par résoudre le cas du problème de Dirichlet homogène :

$$(1.5) \quad \begin{cases} Pu = f & f \in \mathcal{H}'(\Omega) \\ u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Dans ce but, nous essayons de résoudre le problème :

$$(1.6) \quad \begin{cases} Pu = f & f \in \mathcal{H}'(\Omega) \\ u \in \mathcal{N}(\Omega) \end{cases} .$$

Lemme 1.1 : Les solutions du problème (1.6) sont solutions du problème (1.5).

Démonstration : nous montrerons que les fonctions de $M(\Omega)$ admettent des

traces sur Γ et que ces traces sont nulles pour les fonctions de $\mathcal{H}(\Omega)$.

D'après l'hypothèse (H.1'), chaque point $x \in \Gamma$ admet un voisinage ω_x

et un champ de vecteurs X_{jx} , $j_x \in \{1, \dots, r\}$, tel que pour tout point

$y \in \omega_x \cap \Gamma$ le vecteur $X_{j_i}(y)$ est transversal à Γ . Comme Γ est un ensemble compact, il existe un nombre fini de ces voisinages, que nous noterons maintenant $\omega_{x_1}, \dots, \omega_{x_p}$, tels que pour $i = 1, \dots, p$ il existe un indice j_i , avec $j_i \in \{1, \dots, r\}$ tel que le vecteur $X_{j_i}(x)$ soit transversal à Γ pour tout point $x \in \omega_i \cap \Gamma$. Maintenant considérons un de ces ouverts ω_i fixé : appelons-le dorénavant ω et appelons également X le champ de vecteur qui est transversal à Γ sur $\omega \cap \Gamma$. Si l'expression de X est :

$$(1.7) \quad X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

soient $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, $(n-1)$ solutions linéairement indépendantes de l'équation aux dérivées partielles

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = 0.$$

D'autre part, soit φ une fonction telle que

$$(1.9) \quad \begin{cases} \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \varphi(x) > 0 \iff x \in \Omega \\ \varphi(x) = 0 \iff x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors, on vérifie que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \varphi)$ est un difféomorphisme de classe C^∞ qui envoie ω sur un ouvert ω' qui transforme $\omega \cap \Gamma$ en un segment de $\mathbb{R}^{n-1}$, d'autre part X est transformé en l'opérateur $a \frac{\partial}{\partial y}$ $a \neq 0$ sur ω' .

Ainsi, en utilisant une partition de l'unité, nous nous ramenons à l'espace des fonctions suivantes :

$$(1.10) \quad \begin{cases} u \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \\ \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\mathbb{R}_+^n) \end{cases}$$

Or nous savons [13] que ces fonctions admettent des traces sur $\mathbb{R}^{n-1}$, qui sont dans $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. De plus les fonctions appartenant à la fermeture de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ pour la norme $(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2 + \|\frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}^2)^{\frac{1}{2}}$ ont des traces nulles. Le lemme est ainsi entièrement démontré.

1.3. Un théorème d'Isomorphisme : Dans cette partie, nous utilisons essentiellement les hypothèses (H.Γ) et (H.λ). Nous allons montrer le :

Théorème 1.1 : Si les hypothèses (H.Γ) et (H.λ) sont vérifiées, l'opérateur

$$P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + \lambda$$
 est un isomorphisme de $\mathcal{N}(\Omega)$ sur $\mathcal{K}'(\Omega)$.

Nous montrerons le théorème 1.1 en deux étapes. Dans une première étape nous montrons que, étant donnée une distribution f dans $\mathcal{K}'(\Omega)$, il existe une fonction u dans $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que $Pu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ensuite nous montrons que si u est dans $\mathcal{N}(\Omega)$ et vérifie $Pu = f$, alors u est unique. Dans une deuxième étape nous montrons que $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{N}(\Omega)$ coïncident. Dans cette dernière étape l'hypothèse (H.Γ) est essentielle.

Proposition 1.1 : supposons que P vérifie l'hypothèse (H.λ). Soit
 $f \in \mathcal{K}'(\Omega)$; il existe une fonction $u \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $Pu = f$ au sens de
 $\mathcal{D}'(\Omega)$; de plus si $u \in \mathcal{N}(\Omega)$, alors u est unique.

Démonstration : nous utilisons le théorème des projections de J.L. Lions [14].

Définissons sur $\mathcal{K}(\Omega) \times \mathcal{N}(\Omega)$ la forme sesquilinéaire suivante :

$$(1.11) \quad a(u, v) = - \sum_{j=1}^r (X_j u, X_j v) + \sum_{j=1}^r (X_j u, a_j v) - \langle u, \chi_0 v \rangle_{\mathcal{K} \times \mathcal{K}'} + (u, a_0 v) + (\lambda u, v)$$

(,) désigne ici le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

Alors nous avons les deux propriétés suivantes :

a) pour v fixé dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, $a(u,v)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{K}(\Omega)$, ce qui est facile à montrer.

b) nous avons l'inégalité (coercivité).

$$(1.12) \quad -\operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{K}(\Omega)}^2 \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\text{et} \quad \alpha = \min_{x \in \overline{\Omega}} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r (X_j a_j - a_j^2) - \frac{a_0}{2} - \operatorname{Re} \lambda \right)(x)$$

Nous avons $\alpha > 0$ d'après l'hypothèse (A. λ). L'inégalité (1.12) s'obtient d'abord pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, par simple intégration par parties. Ensuite, elle s'étend par densité à $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Les propriétés a) et b) étant vérifiées, le théorème de J.L. Lions assure que, étant donnée une forme linéaire L , continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, muni de la topologie de $\mathcal{K}(\Omega)$, il existe une fonction $u \in \mathcal{K}(\Omega)$ telle que

$$(1.13) \quad a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Soit $f \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Prenons :

$$L(v) = \int f v \, dx$$

L est définie, continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$, muni de la topologie de $\mathcal{K}(\Omega)$. Il s'en suit qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{K}(\Omega)$ telle que :

$$(1.13 \text{ bis}) \quad a(u,v) = \langle f, v \rangle_{\mathcal{K}'(\Omega) \times \mathcal{K}(\Omega)} \quad v \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

En particulier si nous prenons $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, nous obtenons :

$$a(u,v) = f(v)_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$$

mais si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$a(u, v) = (Pu, v) \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) ;$$

(1.13 bis) donne alors :

$$(1.14) \quad Pu = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

Il nous reste à montrer que u est dans $\mathcal{P}(\Omega)$. En effet il suffit de remarquer que si u est dans $\mathcal{K}(\Omega)$ alors $\sum_{j=1}^r X_j^2 u$ est dans $\mathcal{M}(\Omega)$.

Alors

$$X_0 u = f - \sum_{j=1}^r X_j^2 u - \lambda u \in \mathcal{M}'(\Omega) . \text{ Donc } u \in \mathcal{P}(\Omega) .$$

Pour achever la démonstration de la proposition 1.1., il nous reste à montrer l'unicité de u dans $\mathcal{N}(\Omega)$.

$$\text{supposons } \begin{cases} Pu = 0 \\ u \in \mathcal{N}(\Omega) \end{cases}$$

alors $\operatorname{Re} a(u, u) = 0$, mais $\operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$. D'où $u = 0$.

Proposition 1.2 : sous l'hypothèse (H. Γ) les espaces $\mathcal{P}(\Omega)$ et $\mathcal{N}(\Omega)$ coïncident.

Démonstration : il est immédiat que nous avons l'inclusion : $\mathcal{N}(\Omega) \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Nous allons donc montrer que toute fonction $\mathcal{P}(\Omega)$ peut être approchée par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $\mathcal{N}(\Omega)$. En utilisant les cartes locales introduites dans le lemme (1.1) et en écrivant $u = u_0 + \sum_{i=1}^p u_i$ avec $u_i = \xi_i u$ et $(\xi_0, \dots, \xi_p)$ étant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\omega_0, \dots, \omega_p)$, en utilisant d'autre part les difféomorphismes du lemme (1.1), il nous suffit de considérer le cas d'un cylindre $\omega \times I$, ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, et un système de champs de vecteurs où figure $\frac{\partial}{\partial y}$.

D'autre part remarquons, puisque les fonctions $\xi_i u$ sont à support compact dans ω_i , qu'il nous suffit de considérer une fonction de $\mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega = \omega \times I$, telle que son support soit contenu dans un ensemble de la forme $K \times I$, où K est compact dans l'ouvert ω . De plus, il nous suffit d'approcher u , qui a son support dans $K \times I$, par des fonctions de $H_0^1(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$).

La méthode que nous emploierons semblera longue, mais nous obtiendrons en cours de démonstration des lemmes que nous utiliserons par la suite. C'est une méthode dérivée de la méthode de Hormander [7], adaptée au cas tangentiel.

Comme u a son support dans $K \times I$, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier en x soit :

$$\hat{u}(\xi, y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi} u(x, y) dx$$

soit φ une fonction de la seule variable x , avec $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ et φ valant 1 sur K . Nous définissons les fonctions $u_\delta(x, y)$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_\delta(\xi, y) = \frac{1}{1 + \delta^2 |\xi|^2} \hat{u}(\xi, y) \\ u_\delta(xy) = \varphi(x) \bar{\mathcal{F}} \hat{u}_\delta(\xi, y), \quad \bar{\mathcal{F}} \text{ est la transformée de Fourier} \\ \text{inverse.} \end{array} \right.$$

Lemme 1.2 : u_δ converge vers u dans $L^2(\Omega) = L^2(\omega \times I)$, pour $\delta \rightarrow 0$

Démonstration : utilisant le théorème de Plancherel, nous avons :

$$\iint |u_\delta(x, y) - u(x, y)|^2 dx dy = \iint |\hat{u}_\delta(x, y) - \hat{u}(\xi, y)|^2 d_\xi d_y$$

$$= \iint |\hat{\varphi}(\xi) * \left(\frac{1}{1 + \delta^2 |\xi|^2} - 1 \right) \hat{u}(\xi, y)|^2 d_\xi d_y \quad \text{puisque } \varphi u = u$$

$$\leq \| \hat{\varphi}(\xi) \|_{L^1(\xi)} \iint |\hat{u}(\xi, y)|^2 \left| \frac{1}{1 + \delta^2 |\xi|^2} - 1 \right| d_\xi d_y$$

Le théorème de Lebesgue achève la démonstration du lemme.

Lemme 1.3 : Les fonctions $u_\delta(x, y)$ sont dans $H^1_0(\Omega) = H^1_0(\omega \times I)$.

Démonstration : Nous montrons le lemme en deux étapes :

a) $u_\delta(x, y) \in H^1_0(\Omega)$: en effet, nous avons :

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial y} = \varphi(x) \overline{\mathcal{R}} \frac{1}{1 + \delta^2 |\xi|^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u}(\xi, y) \Rightarrow \frac{\partial u_\delta}{\partial y} \in L^2$$

D'autre part l'opérateur $\overline{\mathcal{R}} \frac{1}{1 + \delta^2 |\xi|^2} \hat{u}(\xi, y) = \mathcal{L}(u)$, est un opérateur linéaire continu de $L^2(I, H^s(\omega))$ dans $L^2(I, H^{s+1}(\omega))$; il s'en suit que nous avons :

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial x_i} \in L^2(I ; H^1(\omega)) \subset L^2(\Omega) \quad i = 1 \dots n-1$$

b) $u_\delta(x, y) \in H^1_0(\Omega)$: si nous prenons $I = (0, 1)$, comme u est dans $\mathcal{H}(\Omega)$, u est nulle sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$. D'autre part u est nulle au voisinage des arêtes du cylindre Ω . Il s'en suit que u_δ , qui a une trace sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$, a une trace nulle sur $\omega \times \{0\}$ et sur $\omega \times \{1\}$, ainsi qu'au voisinage des coins du cylindre grâce à la présence de la fonction $\varphi(x)$. D'après un théorème de traces, u_δ appartient à $H^1_0(\Omega)$. En particulier $u_\delta \in \mathcal{N}(\Omega)$ car manifestement $H^1_0(\Omega) \subset \mathcal{N}(\Omega)$.

Lemme 1.4 : Les fonctions u_δ appartiennent à un ensemble borné dans $\mathcal{H}(\Omega)$.

Démonstration : Nous allons montrer que $\|u_\delta\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$ et $\|X_0 u_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ sont bornés par une constante C , indépendante de δ .

Si nous introduisons la notation suivante :

$u_\delta = \varphi(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u$, Δ étant le Laplacien dans $\mathbb{R}^{n-1}$, nous allons montrer les deux inégalités suivantes :

$$(1.15) \quad \|\varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

$$(1.16) \quad \|X_0 \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C (\|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)})$$

Pour montrer (1.15) et (1.16) nous utiliserons les points suivants :

a) soit R un opérateur différentiel tangentiel d'ordre $j \leq 2$ à coefficients dans $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, alors nous avons

$$(1.17) \quad \|(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^j R v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\text{En effet} \quad \|(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^j R v\|_{L^2(\Omega)} = \|P^* \delta^j (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v\|_{L^2}$$

Comme $\frac{|\xi|^j \delta^j}{1 + \delta^2 |\xi|^2} \leq 1$ pour $j \leq 2$ l'inégalité (3.7) est immédiate.

b) soit S un opérateur différentiel tangentiel d'ordre inférieur ou égal à 1 à coefficients dans $C_0^\infty(\bar{\Omega})$, alors nous avons l'inégalité :

$$(1.18) \quad \|[S, (1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] v\|_{L^2} \leq C \|v\|_{L^2} \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En effet si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} = \psi \iff \psi = (1 - \delta^2 \Delta) \psi$

$$[S, (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v] = (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} [S, \delta^2 \Delta] \psi = (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \delta^2 R \psi$$

en posant $R = [S, \Delta]$. Comme R est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre ≤ 2 , à coefficients dans $C_0^\infty(\Omega)$, nous pouvons appliquer l'inégalité (1.17). Ainsi (1.18) en découle.

Revenons maintenant à la démonstration des inégalités (1.15) et (1.16).

Montrons (1.15). Pour cela il suffit d'avoir les deux inégalités :

$$(1.15)' : \quad \left\| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u \right\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}}$$

$$(1.15)'' : \quad \|y_j \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}}$$

y_j désignant la composante tangentielle du champ X_j (1.15)' est immédiate car :

$$\left\| \frac{\partial}{\partial y} \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u \right\|_{L^2} = \left\| \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)}$$

D'autre part :

$$\|y_j \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{L^2} \leq \|[y_j, \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] u\|_{L^2} + \|\varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} y_j u\|_{L^2}$$

L'application des inégalités (1.17) et (1.18) donne le résultat pour (1.15)''. Il nous reste à montrer l'inégalité (1.16). Or nous avons

$$y_0 \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u = [y_0, \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] u + \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} y_0 u$$

$$\|y_0 \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq \|[y_0, \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} +$$

$$\|\varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} y_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$$

Mais d'après l'inégalité (1.18) nous avons

$$\|[y_0, \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C \|[y_0, \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}] u\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}$$

d'autre part l'inégalité $\|\varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} y_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C \|y_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ s'obtient en passant au dual, par considération de l'inégalité

$$(1.15) \quad \|\varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad \text{qui est l'inégalité.}$$

Ainsi nous obtenons bien

$$\|X_0 \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C (\|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} + \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)})$$

Le lemme 1.4 est ainsi entièrement démontré.

Démonstration de la proposition 1.2 : soit $u \in \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(\omega \times I)$ telle que son support soit contenu dans $K \times I$, où K est un compact de ω . D'après le lemme (1.3) les fonctions u_δ sont dans $H_0^1(\Omega)$, donc peuvent être approchées par des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $H(\Omega)$. Mais d'après le lemme (1.4) les fonctions u_δ sont dans un ensemble borné de $\mathcal{N}(\Omega)$; par suite, pour $\delta \rightarrow 0$, il existe une sous-suite, que nous noterons encore u_δ qui converge faiblement dans $\mathcal{N}(\Omega)$; mais comme, d'après le lemme (1.2), u_δ converge vers u dans $L^2(\Omega)$, pour $\delta \rightarrow 0$, la limite faible, dans $\mathcal{N}(\Omega)$, de la sous suite u_δ n'est autre que u . Donc u appartenant à $\mathcal{N}(\Omega)$. La proposition 1.2 est ainsi démontrée.

Ainsi le théorème 3.1 est établi. Ce théorème résoud le problème (2.3), donc le problème de Dirichlet homogène. Dans le cas non homogène on a le :

Théorème 1.2 : supposons les hypothèses (H.Γ) et (H.λ) satisfaites. Soient $f \in \mathcal{H}'(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Il existe une fonction u , unique dans $\mathcal{N}(\Omega) + H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} Pu = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Démonstration : soit $\tilde{g}$ un relèvement de g dans $H^1(\Omega)$ [13]. Considérons

alors le problème

$$(1.19) \quad \begin{cases} Pu = f - P\tilde{g} & f \in \mathcal{H}'(\Omega) \\ u \in \mathcal{N}(\Omega) \end{cases}$$

Comme $P\tilde{g}$ est dans $\mathcal{H}'(\Omega)$, le problème (1.19) admet une solution u , unique d'après le théorème 1.1.

Prenant $V = u + \tilde{g}$, nous avons bien

$$PV = Pu + P\tilde{g} = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$V = g \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{car } u = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

D'autre part si $v_1 = u_1 + \tilde{g}_1$ et $v_2 = u_2 + \tilde{g}_2$ sont deux solutions dans $\mathcal{N}(\Omega) + H^1(\Omega)$, nous avons $P(v_1 - v_2) = 0$ et $v_1 - v_2 \in \mathcal{N}(\Omega)$.

Cela entraîne $v_1 = v_2$ d'après le théorème (1.1)

2. Régularité des Solutions :

C'est dans cette partie que l'hypothèse (H.0) sera essentielle, combinée avec l'hypothèse (H.Γ). Nous nous attachons à démontrer la régularité à la frontière de solutions.

2.1. Régularité tangentielle :

Nous commencerons par énoncer le :

Lemme 2.1 : Supposons les hypothèses (H.0) et (H.Γ) vérifiées. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que nous ayons l'inclusion algébrique et topologique

$$(2.1) \quad \mathcal{N}(\Omega) \subset H^\varepsilon(\Omega)$$

Démonstration : Nous nous ramenons comme dans la proposition (3.2) au cas d'un ouvert $\Omega = \omega \times I$ et d'une fonction de $\mathcal{N}(\Omega)$ telle que son support soit contenu dans un ensemble de la forme $K \times I$, où K est un compact de l'ouvert ω . Nous avons vu qu'une telle fonction peut être approchée par des fonctions de $C_0^\infty(K_1 \times I)$ où K_1 est un autre compact de ω .

Il suffit alors d'appliquer le théorème (2.1) du chapitre 3.

Dorenavant, nous nous plaçons, grâce à nos hypothèses, dans le cas d'un cylindre $\Omega = \omega \times I$, $I = (0,1)$, avec un opérateur P de la forme

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_1^r X_j^2 + X_0 + \lambda.$$

De plus nous considérons des fonctions ayant leur support dans un ensemble de la forme $K \times I$. D'autre part ces fonctions ont des traces nulles ^{sur} $\omega \times \{0\}$ et $\omega \times \{1\}$. Dans la suite nous utiliserons le :

Lemme 2.2 : Il existe une constante C telle que :

$$(2.2) \quad \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C (\|Pu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Démonstration :

Nous savons déjà que :

$$\sum_1^r \|X_j u\|_{L^2}^2 + \alpha \|u\|_{L^2}^2 \leq -\operatorname{Re}(Pu, u) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Mais :

$$-\operatorname{Re}(Pu, u) \leq \frac{1}{2} (\|Pu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 + \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2). \quad \text{D'où}$$

$$\|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 \leq C (\|Pu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2}^2) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\text{D'autre part} \quad \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 \leq \|Pu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 + \|Qu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 \quad Q = P - X_0$$

Mais :

$$\|Qu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2 \leq C \|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2, \text{ ce qui se vérifie aisément}$$

ce qui donne facilement

$$\|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C (\|Pu\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} + \|u\|_{L^2}) \quad u \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Comme $\mathcal{H}'(\Omega)$ est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $(\|u\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 + \|X_0 u\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}^2)$ l'inégalité (2.2) en découle.

Pour établir la régularité tangentielle, nous allons montrer que si $f \in H^{\varepsilon}(\Omega)$ alors $u \in L^2(I, H^{2\varepsilon}(\omega))$ et ainsi de suite, nous gagnons ε en régularité tangentielle à chaque opération.

Définissons comme suit, les fonctions v_{δ} :

Comme le support de u est dans $J \times K$, nous pouvons considérer sa transformée de Fourier ; appelons :

$$T_{\varepsilon} u(x, y) = \overline{\mathcal{F}}_x \cdot (1 + |\xi|^2)^{\varepsilon/2} \hat{u}(\xi, y)$$

$\overline{\mathcal{F}}_x$ désignant la transformée de Fourier inverse en x . Soit :

$$\begin{cases} v(x, y) = \varphi(x) T_{\varepsilon} u(x, y), & \varphi(x) \in \mathcal{D}(\omega) \quad \varphi = 1 \text{ sur } K \\ v_{\delta}(x, y) = \phi(x) (1 + \delta^2 |\xi|^2)^{-1} v(\xi, y) & \text{ou} \\ v_{\delta}(x, y) = \phi(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi T_{\varepsilon} u(x, y) & \phi \in \mathcal{D}(\omega) \text{ et } \phi \varphi = \varphi \end{cases}$$

Nous avons alors les lemmes suivants :

Lemme 2.3 : $\underline{v_{\delta}}$ converge vers v dans $L^2(\Omega) = L^2(\omega \times I)$ pour $\delta \rightarrow 0$.

Démonstration : même démonstration que dans le lemme (1.2).

Lemme 2.4 : $\underline{\text{les fonctions } v_{\delta}}$ sont dans $H^1_0(\Omega)$.

Démonstration : voir le lemme (1.3) .

Lemme 2.5 : Si f est dans $H^E(\Omega)$ avec $Pu = f$ et $u \in \mathcal{N}(\Omega)$, alors Pv est dans $\mathcal{M}'(\Omega)$.

Démonstration : Nous pouvons écrire Pv sous la forme

$$Pv = P\varphi_{\varepsilon}^T u = [P, \varphi_{\varepsilon}^T]u + \varphi_{\varepsilon}^T Pu = [P, \varphi_{\varepsilon}^T]u + \varphi_{\varepsilon}^T f$$

Comme $f \in H^E(\Omega)$, $\varphi_{\varepsilon}^T f \in L^2(\Omega)$ donc $\varphi_{\varepsilon}^T f \in \mathcal{M}'(\Omega)$

Il nous reste donc à montrer que :

$$[P, \varphi_{\varepsilon}^T]u \in \mathcal{M}'(\Omega) .$$

Utilisons l'expression de P ; alors nous avons

$$(2.3) \left\{ \begin{aligned} [P, \varphi_{\varepsilon}^T]u &= 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{\varepsilon}^T \right]u + 2 \sum_{j=1}^r X_j [X_j, \varphi_{\varepsilon}^T]u + \left[\left[\frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{\varepsilon}^T \right], \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^r \left[[X_j, \varphi_{\varepsilon}^T], X_j \right]u + [X_0, \varphi_{\varepsilon}^T]u + [\lambda, \varphi_{\varepsilon}^T]u \end{aligned} \right.$$

(2.3) s'obtient en remarquant l'égalité suivante :

$$[X_j^2, \varphi_{\varepsilon}^T] = 2X_j [X_j, \varphi_{\varepsilon}^T] + [[X_j, \varphi_{\varepsilon}^T], X_j]$$

D'après l'égalité (2.3), nous voyons qu'il nous suffit de montrer :

$$(2.4) \left\{ \begin{aligned} [X_j, \varphi_{\varepsilon}^T]u &\in L^2(\Omega) \\ ([X_j, \varphi_{\varepsilon}^T], X_j]u &\in \mathcal{M}'(\Omega) \\ [X_0, \varphi_{\varepsilon}^T]u &\in \mathcal{M}'(\Omega) \end{aligned} \right.$$

$$a) [X_j, \varphi_{\varepsilon}^T]u = [\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{\varepsilon}^T]u + [y_j, \varphi_{\varepsilon}^T]u \quad ; \quad X_j = \beta_j \frac{\partial}{\partial y} + y_j$$

Comme $\frac{\partial}{\partial y}$ et φ_{ε}^T commutent et que $u \in L^2(\Omega)$, il en découle que

$$[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{T_\varepsilon}]u \in L^2(\Omega) .$$

D'autre part $[y_j, \varphi_{T_\varepsilon}]$ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre ε . Comme $u \in \mathcal{N}(\Omega) \subset H^\varepsilon(\Omega)$, on a bien $[y_j, \varphi_{T_\varepsilon}]u \in L^2(\Omega)$
[11]

b) $[[X_j, \varphi_{T_\varepsilon}], X_j] \in L^2(\Omega)$. Cela se fait comme dans a).

c) $[X_0, \varphi_{T_\varepsilon}]u \in \mathcal{H}'(\Omega)$:

$$X_0 = \beta_0 \frac{\partial}{\partial y} + y_0 \implies [X_0, \varphi_{T_\varepsilon}]u = [\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{T_\varepsilon}]u + [y_0, \varphi_{T_\varepsilon}]u .$$

Comme dans a) : $[\beta_0 \frac{\partial}{\partial y}, \varphi_{T_\varepsilon}]u \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{H}'(\Omega)$, $[y_0, \varphi_{T_\varepsilon}]u \in L^2(\Omega)$

Le lemme 2.5 est ainsi entièrement démontré.

En utilisant l'inégalité (2.2), nous allons montrer que les fonctions v_δ appartiennent à un ensemble borné de $\mathcal{N}(\Omega)$. En effet d'après cette inégalité (2.2) il suffit de montrer que les distributions PV_δ appartiennent à un ensemble borné de $\mathcal{H}'(\Omega)$. soit :

Proposition 2.1 : Les distributions PV_δ appartiennent à un ensemble borné de $\mathcal{H}'(\Omega)$.

Nous démontrerons cette proposition après avoir établi un certain nombre de lemmes. Nous allons d'abord donner une nouvelle expression de PV_δ .

a) Nouvelle expression de PV_δ :

Rappelons l'expression de V_δ

$$V_\delta(x,y) = \phi(x) \cdot (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi(x) T_\varepsilon u(x,y)$$

$\phi(x)$ vaut 1 sur un voisinage ω_1 du support de $\varphi(x)$, dans ω .

Notons Ω_1 l'ouvert $\omega_1 \times I$ $\Omega_1 = \omega_1 \times I$

Avec ces notations nous avons :

$$(2.5) \quad v = (1 - \delta^2 \Delta) v_\delta \quad \text{dans } \Omega_1$$

$$(2.6) \quad P v = P(1 - \delta^2 \Delta) v_\delta = [P, 1 - \delta^2 \Delta] v_\delta + (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta \quad \text{dans } \Omega_1 .$$

En utilisant de nouveau la décomposition :

$$[X_j^2, \Delta] = 2 X_j [X_j, \Delta] + [[X_j, \Delta], X_j]$$

et en posant :

$$A_j = [X_j, \Delta] ; A_0 = \sum_1^r [[X_j, \Delta], X_j] + [X_0 + \lambda, \Delta] \quad \text{nous avons :}$$

$$(2.7) \quad \begin{cases} P v = (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta - \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta - \delta^2 A_0 v_\delta & \text{dans } \Omega_1 \\ (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta = P v + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta \end{cases}$$

Définissons maintenant les distributions h_δ par :

$$(2.8) \quad h_\delta = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_1 \\ (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta & \text{sur } \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

En combinant (2.7) et (2.8) nous obtenons :

$$(2.9) \quad (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta = P v + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta + h_\delta$$

Appliquant l'opérateur $(1 - \delta^2 \Delta)^{-1}$ aux deux membres de (2.9) nous avons :

$$(2.10) \quad P v_\delta = \psi_1(x) \{ (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} [P v + \sum_1^r \delta^2 X_j A_j v_\delta + \delta^2 A_0 v_\delta + h_\delta] \}$$

où $\psi_1(x)$ est une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ telle que $\psi_1 \psi = \psi$.

b) Etude de $P v_\delta$:

Nous utiliserons l'expression (2.10) pour montrer la quantité $\|P v_\delta\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ reste bornée lorsque δ tend vers zéro.

Remarquons de suite que nous pouvons nous débarrasser de l'opérateur $\psi_1(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1}$ qui apparaît dans le second membre de (2.10). En effet nous avons montré dans le lemme (1.4) l'inégalité :

$$\|\psi_1 (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \leq C \|v\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \quad v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

En passant au dual, nous avons l'inégalité :

$$(2.11) \quad \|\psi_1 (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} f\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \quad f \in \mathcal{H}'(\Omega)$$

En regardant les inégalités (2.10) et (2.11), pour montrer que $\|Pv_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ reste borné, il suffit de montrer que les quantités :

$$\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}, \quad \|\delta^2 A_0 v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|h_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$$

restent bornées lorsque δ tend vers zéro.

Lemme 2.6 : Les quantités $\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ et $\|\delta^2 A_0 v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ restent bornées lorsque δ tend vers zéro.

Démonstration :

a) $\|\delta^2 X_j A_j v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ est borné :

si nous remarquons que $\|X_j f\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$, il suffit de montrer que $\|\delta^2 A_j v_\delta\|_{L^2}$ reste borné.

$$A_j = 2[y_j, \Delta] + 2[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta] \quad X_j = y_j + \beta_j \frac{\partial}{\partial y}$$

$[y_j, \Delta]$ est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 2. Donc :

$$\|[\delta^2 [y_j, \Delta] v_\delta]\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{L^2}$$

D'autre part remarquons que nous avons :

$$(2.12) \quad \left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta \right] = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \quad \mu_i, \mu \in C^\infty(\Omega)$$

D'où en utilisant (2.12) et la définition de v_δ :

$$(2.13) \quad \left\| \delta^2 \mu \frac{\partial}{\partial y} v_\delta \right\|_{L^2} \leq C \left\| \delta^2 \frac{\partial v_\delta}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \delta^2 \psi(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi^\top_\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}$$

$$\left\| \delta^2 \mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y} v_\delta \right\|_{L^2} \leq C \left\| \delta^2 \frac{\partial^2 v_\delta}{\partial x_i \partial y} \right\|_{L^2} \leq C \left\| \delta^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi^\top_\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}$$

Comme $(\epsilon < \frac{1}{2}) \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi^\top_\epsilon$ est un opérateur continu de L^2 dans L^2 nous obtenons :

$$(2.14) \quad \left\| \delta^2 \mu_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y} v_\delta \right\|_{L^2} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2}$$

(2.12), (2.13) et (2.14) donnent :

$$\left\| \left[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta \right] v_\delta \right\|_{L^2} \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \leq C'$$

b) $\left\| \delta^2 A_o v_\delta \right\|_{\mathcal{W}(\Omega)}$ reste borné :

$$A_o = \sum_1^r [[X_j, \Delta], X_j] + [X_o + \lambda, \Delta]$$

Il est immédiat d'après a) que nous avons :

$$\left\| \delta^2 [X_o + \lambda, \Delta] v_\delta \right\|_{\mathcal{W}(\Omega)} \leq C \|v\|_{\mathcal{W}(\Omega)}$$

Reste à montrer que $\left\| \delta^2 [[X_j, \Delta], X_j] v_\delta \right\|_{\mathcal{W}(\Omega)}$ reste borné.

Réécrivant : $X_j = \beta_j \frac{\partial}{\partial y} + y_j$. Alors :

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} [[x_j, \Delta], x_j] &= [[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}] + [[y_j, \Delta], y_j] + [[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta], y_j] \\ &+ [[y_j, \Delta], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}] \end{aligned} \right.$$

Les opérateurs y_j étant tangentiels et utilisant a) , nous voyons qu'il nous suffit de considérer le premier terme du second membre

Ici nous avons :

$$(2.16) \quad [[\beta_j \frac{\partial}{\partial y}, \Delta], \beta_j \frac{\partial}{\partial y}] = \alpha \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y} ; \quad \alpha, \gamma, \gamma_i \in C^\infty(\Omega)$$

D'autre part nous avons les inégalités suivantes faciles à montrer

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\alpha \delta^2 \frac{\partial v \delta}{\partial y}\|_{\mathcal{H}'} &\leq C \|u\|_{L^2} \\ \|\gamma \delta^2 \frac{\partial^2 v \delta}{\partial y^2}\|_{\mathcal{H}'} &\leq C \|\delta^2 \frac{\partial v \delta}{\partial y}\|_{L^2} \leq C \|\frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2} \\ \|\gamma_i \delta^2 \frac{\partial^2 v \delta}{\partial x_i \partial y}\| &\leq C \|\delta^2 \frac{\partial v \delta}{\partial x_i}\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2} \end{aligned} \right.$$

Les égalités (2.15) (2.16) et les inégalités (2.17) donnent le lemme.

Lemme 2.7 : $\|h_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)}$ tend vers zéro lorsque δ tend vers zéro.

Démonstration : Rappelons la définition de h_δ

$$(2.8 \text{ bis}) \quad h_\delta = \begin{cases} 0 & \text{sur } \Omega_1 = \omega_1 \times I \\ (1 - \delta^2 \Delta) P v_\delta & \text{sur } \Omega - \Omega_1 \end{cases}$$

si nous appelons G la distribution transformée inverse de Fourier de la fonction $\frac{1}{1 + |\xi|^2}$, nous avons l'égalité

$$(2.18) \quad v_{\delta}(x,y) = \psi(x)(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v(x,y) = \psi(x) \delta^{-(n-1)} \int G\left(\frac{z}{\delta}\right) v(x-z,y) dz$$

soit η la distance de $C \omega_1$ au support de φ dans ω ; ω_1 étant un voisinage du support de $R^{n-1} \varphi$, η est un nombre strictement positif.

Par suite nous obtenons :

$$(2.19) \quad x \in \omega - \omega_1 \quad |z| < \eta \implies v(x-z,y) = 0$$

$$(2.20) \quad v_{\delta}(x,y) = \psi(x) \delta^{-(n-1)} \int_{|z| \geq \eta} G\left(\frac{z}{\delta}\right) v(x-z,y) dz, \quad x \in \omega - \omega_1$$

G et ses dérivées décroissent exponentiellement vers zéro, lorsque la variable tend vers l'infini [17]

Ainsi, quel que soit l'opérateur différentiel tangentiel Q , nous avons :

$$(2.21) \quad \|Q v_{\delta}\|_{L^2(\Omega - \Omega_1)} \longrightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

Pour montrer (2.21), il suffit de prendre $Q = \frac{\partial^P}{\partial x_i^P}$, $i = 1, \dots, n-1$, $p \in \mathbb{N}$

$$(2.22) \quad \frac{\partial^P}{\partial x_i^P} (1 - \delta^2 \Delta)^{-1} v(x,y) = \delta^{-(n-1)-p} \int_{|z| \geq \eta} \frac{\partial^P G}{\partial x_i^P} \left(\frac{z}{\delta}\right) v(x-z,y) dz, \quad x \notin \omega$$

Comme $\frac{\partial^P G}{\partial x_i^P} \left(\frac{z}{\delta}\right)$ décroît exponentiellement vers zéro, à l'infini,

et comme $v \in L^2(\Omega)$, (2.21) découle de (2.22).

Ecrivons P sous la forme :

$$P = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_1^r y_j^2 + \sum_1^r y_j \beta_{jj} \frac{\partial}{\partial y} + \sum_1^r \beta_j \frac{\partial}{\partial y} y_j + X_0 + \lambda$$

Remarquons que nous avons :

$$\|h_\delta\|_{L^2(\Omega)} = \|h_\delta\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)}$$

Ceci nous permettra d'utiliser (4.21)

Pour montrer que $\|h_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega)} = \|h_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega-\Omega_1)}$ tend vers zéro

il nous suffit de montrer, d'après l'expression de P que :

$$\|(1 - \delta^2 \Delta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega-\Omega_1)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

Les autres termes étant bien plus simples à traiter. Comme

$$\|(1 - \delta^2 \Delta) \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_\delta\|_{\mathcal{H}'(\Omega-\Omega_1)} \leq C \|(1 - \delta^2 \Delta) \frac{\partial v_\delta}{\partial y}\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)}$$

il nous suffit de montrer que :

$$(2.23) \quad \|(1 - \delta^2 \Delta) \frac{\partial v_\delta}{\partial y}\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} \longrightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0$$

(2.23) découle aisément de :

$$(2.24) \quad \|Q(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial y}\|_{L^2(\Omega-\Omega_1)} \longrightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0, \quad Q \text{ tangentiel.}$$

Montrons (2.24) :

$$(2.25) \quad \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \implies \varphi_\varepsilon^T \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(I, H^{-\varepsilon}(\mathbb{R}^{n-1})) \subset L^2(I, H^{-1}(\mathbb{R}^{n-1}))$$

(2.25) nous permet d'écrire :

$$(2.26) : \quad T_\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} = u + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \quad u, u_i \in L^2(\Omega)$$

(2.26) nous permet de nous ramener à étudier les deux limites :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \varphi(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi u \right\|_{L^2(\Omega - \Omega_1)} , \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| Q(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega - \Omega_1)}$$

Comme le support de φ est contenu strictement dans l'ouvert ω_1 .

(2.22) est applicable et ainsi :

$$(2.27) \quad \begin{cases} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| Q(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi u \right\|_{L^2(\Omega - \Omega_1)} = 0 & Q \text{ tangentiel} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| Q(1 - \delta^2 \Delta)^{-1} \varphi u \right\|_{L^2(\Omega - \Omega_1)} = 0 & Q \text{ tangentiel} \end{cases}$$

(2.24) découle alors de (2.27). Ainsi (2.23) est montré.

Le lemme (2.7) est établi, et par suite il en est de même de la proposition 2.1.

Maintenant nous sommes en mesure de montrer la :

Proposition 2.2 : soit u la solution dans $\mathcal{N}(\Omega)$ de l'équation $Pu = f$, avec $f \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Si $f \in H^\varepsilon(\Omega)$, u est dans $L^2(I, H^{2\varepsilon}(u))$.

Démonstration : D'après la proposition (2.1), $\|Pv_\delta\|_{\mathcal{K}'(\Omega)}$ reste borné pour $\delta \rightarrow 0$. L'inégalité (2.2) entraîne que $\|v_\delta\|_{\mathcal{N}(\Omega)}$ reste borné. Donc il existe une sous-suite, que nous noterons encore v_δ , qui a une limite faible dans $\mathcal{N}(\Omega)$. Comme v_δ converge dans $L^2(\Omega)$ vers v (lemme 4.3), on déduit que cette limite faible est égale à v .

Ainsi $v \in \mathcal{N}(\Omega) \subset H^\varepsilon(\Omega)$. Mais $v = \varphi T_\varepsilon u$; nous avons alors

$$v = \varphi T_\varepsilon u = [\varphi, T_\varepsilon]u + T_\varepsilon u \quad \text{puisque} \quad \varphi u = u$$

Comme $[\varphi, T_\varepsilon]u \in H^\varepsilon$ et que $v \in H^\varepsilon$, on en déduit $T_\varepsilon u \in H^\varepsilon$.

D'où $u \in L^2(I, H^{2\varepsilon}(\omega))$.

Si nous continuons ainsi par récurrence, nous gagnons à chaque étape, H^ε en régularité tangentielle. Nous pouvons énoncer le :

Théorème 2.1 : soit u la solution de $Pu = f$, $f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Supposons que $f \in L^2(I, H^k(\omega))$, où k est un entier positif. Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\omega)$ telle que $\varphi u = u$. Alors $\varphi T_{k\varepsilon} u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. En particulier $u \in L^2(I, H^{(k+1)\varepsilon}(\omega))$.

2.2. Régularité normale :

Pour cela, revenons à notre équation

$$Pu = \left(1 + \sum_1^r \beta_j^2\right) \frac{\partial u}{\partial y^2} + \sum_1^r y_j^2 u + \sum_1^r \beta_j \frac{\partial}{\partial y} y_j u + \sum_1^r y_j \beta_j \frac{\partial}{\partial y} u + X_0 + \lambda u.$$

Nous procéderons aussi par étapes :

Soit $f \in H^{2-\varepsilon}(\Omega)$; donc $f \in L^2(I, H^{2-\varepsilon}(\Omega))$. Appliquons alors le théorème (2.1).

$\varphi T_2 u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Soit, en particulier :

$$(2.28) \quad \begin{cases} X_j \varphi T_2 u \in L^2 \\ \varphi T_2 \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2 \end{cases}$$

De (2.28) nous tirons encore :

$$(2.29) \quad \begin{cases} y_j^2 u \in L^2(\Omega) \\ \beta_j \frac{\partial}{\partial y} y_j u \in L^2(\Omega) \\ y_j \beta_j \frac{\partial}{\partial y} u \in L^2(\Omega) \\ (X_0 + \lambda)u \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

(2.29) et l'équation donnent alors :

$$(2.30) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L^2(\Omega)$$

Comme pour la régularité tangentielle nous voyons bien comment s'effectue la récurrence, ceci comme dans le cas elliptique.

En revenant à notre ouvert de départ nous avons le :

Théorème 2.2 : soit Ω un ouvert borné, de frontière Γ , Γ étant une variété de dimension $(n-1)$, de classe C^∞ , et Ω étant localement d'un même côté de Γ . Soit P un opérateur différentiel du second ordre de la forme $P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + \lambda$, satisfaisant les hypothèses $(H.O)$, $(H.\Gamma)$ et $(H.\lambda)$. Nous savons que P est un isomorphisme de $\mathcal{H}(\Omega)$ sur $\mathcal{K}'(\Omega)$. Soit u la solution dans $\mathcal{H}(\Omega)$ de $Pu = f$, avec $f \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Si f est dans $H^{k\varepsilon}(\Omega)$, alors u est dans $H^{(k+1)\varepsilon}(\Omega)$. En particulier si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Corollaire 2.1 : soit u la solution dans $\mathcal{H}(\Omega) + H^1(\Omega)$ du problème (1.4). Si $f \in H^k(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{k+3}{2}}(\Gamma)$, alors $u \in H^{(k+1)\varepsilon}(\Omega)$. En particulier si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $g \in C^\infty(\Gamma)$, alors $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Remarque générale : il est intéressant de noter la similitude de cette méthode avec celle de Nirenberg pour le cas elliptique. Nirenberg montre que les quotients différentiels $\frac{\mathcal{D}_{h_i} u - u}{h_i}$ restent bornés dans H_0^1 lorsque $h_i \rightarrow 0$ $i = 1, \dots, n-1$, et il en déduit que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1$. Ensuite il revient à l'opération $Au = f$, pour montrer que $\frac{\partial u}{\partial y} \in H^1$. Ici les fonctions v_δ jouent le rôle des quotients différentiels [16].

3. Quelques exemples :

3.1. Un exemple simple :

Prenons comme ouvert Ω la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^3$. Γ est alors la

sphère unité. Tout point sera désigné par (x,y,z) .

Considérons les champs de vecteurs suivants :

$$\begin{cases} X_0 = \frac{\partial}{\partial y} \\ X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \end{cases}$$

Nous avons $[X_1, X_2] = -\frac{\partial}{\partial x}$. Donc en tout point de $\mathbb{R}^3$, l'espace vectoriel formé par les combinaisons linéaires des trois vecteurs $X_0, X_2, [X_1, X_2]$, est de dimension trois. Donc $(H.\mathbb{R}^3)$ est vérifiée. Montrons qu'en tout point de Γ , l'un au moins des deux vecteurs X_1, X_2 est transversal à Γ .

$[X_1, X_2]$, est de dimension trois. Donc $(H.\mathbb{R}^3)$ est vérifiée. Montrons qu'en tout point de Γ , l'un au moins des deux vecteurs X_1, X_2 est transversal à Γ .

Si en un point $(x,y,z) \in \Gamma$ les deux vecteurs $X_1(x,y,z)$ et $X_2(x,y,z)$ sont tangents à Γ , on devrait avoir

$$(3.1) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Manifestement (5.1) ne peut avoir lieu. Par suite l'hypothèse $(H.\Gamma)$ est vérifiée. D'autre part, les opérateurs X_0 et X_2 ont pour adjoints $-X_0$ et $-X_2$, et X_1 a pour adjoint $-2 - X_1$.

Considérons alors l'opérateur :

$$P = X_1^2 + X_2^2 + X_0 + \lambda$$

Ecrivons alors la condition $(H.\lambda)$ qui donne ici

$$- \operatorname{Re} \lambda > -1 \implies \operatorname{Re} \lambda < 1$$

Remarque 3.1 : cherchons les points où P est elliptique. Le polynôme caractéristique est égal à : $(x\xi_1 + y\xi_2)^2 + (\xi_1 + \xi_2)^2$. Il s'annule en un point si :

$$(3.2) \quad \begin{cases} x\xi_1 + y\xi_2 = 0 \\ \xi_1 + \xi_3 = 0 \end{cases}$$

Quel que soit le point (x, y, z) , (5.2) peut avoir lieu, pour un triplet $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$

En effet il suffit de prendre :

$$\xi_1 = -\xi_3 \quad \text{et}$$

- a) si $y = 0$ ξ_2 peut être choisi arbitrairement $\xi_1 = -\xi_3 = 0$
- b) si $x = 0$ ξ_1 peut être pris arbitrairement
- c) $x \neq 0, y \neq 0$ ξ_1, ξ_2, ξ_3 peuvent être non nuls.

Donc P n'est elliptique nulle part.

3.2. Deuxième exemple - L'équation de Kolmogorov.

L'équation de Kolmogorov est l'équation suivante :

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

Tout point de $\mathbb{R}^3$ sera noté (x, y, t) . Considérons la bande

$$B =]0, 1[\times \mathbb{R}^2, \quad x \in]0, 1[\quad (t, y) \in \mathbb{R}^2.$$

L'équation (3.3) s'écrit encore :

$$(3.3)' \quad \begin{cases} X_0 u + X_1^2 u = f \\ X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_0 = -\frac{\partial}{\partial t} - x \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Comme dans la section 2, nous considérons les espaces $M(B)$ $\mathcal{M}(B)$,
 $P(B)$, $\mathcal{M}'(B)$ que nous rappelons dans notre cas

$$M(B) = \{u \in L^2(B) , \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(B)\}$$

$$\mathcal{M}(B) = \{ \text{fermeture de } \mathcal{D}(B) \text{ dans } M(B) \} ;$$

$$\mathcal{P}(B) = \{ u \in \mathcal{M}(B) , \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial y} \in \mathcal{M}'(B) \}$$

$$\mathcal{M}'(B) = \{ \text{dual topologique de } \mathcal{M}(B) \}$$

Nous avons alors le

Théorème 3.1 : soit $f \in \mathcal{M}'(B)$. Il existe $u \in \mathcal{P}(B)$, unique telle que :
 $Pu = f$ dans $\mathcal{D}'(B)$.

De plus, si $f \in H^{k-\varepsilon}(B)$, alors pour toute fonction $\varphi(y,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$
 $\varphi u \in H^k(B)$. En particulier si $f \in C^\infty(\bar{B})$, $u \in C^\infty(\bar{B})$.

Démonstration : le système $\{X_0, X_1\}$, où X_0 et X_1 sont donnés dans
 $(3.3)'$, vérifie l'hypothèse $(H.R^2)$. En effet il suffit de remarquer que
 $[X_0, X_1] = \frac{\partial}{\partial y}$.

L'hypothèse $(H.\Gamma)$ est aussi vérifiée car le champ $\frac{\partial}{\partial x}$ est transversal
aux hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$.

Quant à l'hypothèse $(H.\lambda)$, elle est immédiate car

$$\|\varphi\|_{L^2(B)} \leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|_{L^2(B)} \quad \varphi \in \mathcal{D}(B)$$

d'après l'inégalité de Poincaré. Donc :

$$\|\varphi\|_{L^2(B)} \leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|_{L^2(B)} \quad \varphi \in \mathcal{M}(B)$$

Démonstration de l'unicité : il convient de remarquer que B n'est pas un

ouvert borné ; l'application de la section 2 donne dans ce cas seulement l'existence. Mais ici, l'unicité est facile à établir. Soit

$$(3.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u \in \mathcal{P}(B) \end{cases}$$

D'après le résultat de régularité $u \in C^\infty(\bar{B})$. De plus u est nulle sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$. Nous avons alors :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \int_B \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \bar{u} \, dx \, dy \, dt = 0 & \underline{\text{ou}} \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(B)}^2 = \operatorname{Re} \int_B \left(x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \bar{u} \, dx \, dy \, dt . \end{cases}$$

Utilisant le fait que u est de classe C^∞ dans $\bar{B}$ et qu'elle est nulle sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ on obtient

$$(3.6) \quad \operatorname{Re} \int_B \left(x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \bar{u} \, dy \, xy \, dt = 0$$

De (3.5) et (3.6) on déduit

$$(3.7) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(B)} = 0 \implies \|u\|_{L^2(B)} = 0 \implies u = 0$$

Maintenant nous allons écrire l'équation de Kolmogorov, comme équation parabolique, en faisant jouer un rôle privilégié à la variable t

L'équation (3.3) sera donc notée :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda u = f \\ \Lambda = x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases}$$

L'équation :

$$(3.9) \quad \Lambda u = g$$

a été étudiée par Baouendi-Grisvard. Considérons l'ouvert :

$$\Omega =]0, y[X]0, 1[\quad ; \quad y \in]0, y[\quad , \quad x \in]0, 1[\quad .$$

Lemme 3.1 : l'opérateur $-\Lambda$ défini par

$$D(-\Lambda) = \left\{ \begin{array}{l} u(y, x) \in L^2(]0, y[\quad ; \quad H^1_0(]0, 1[)) \\ x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L^2(]0, y[X]0, 1[) = L^2(\Omega) \\ u(0, x) = 0 \\ -\Lambda u = -x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array} \right.$$

est générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.

Démonstration : D'après le travail de Baouendi-Grisvard, nous avons la formule de Green :

$$(3.10) \quad \langle x \frac{\partial u}{\partial y} , \bar{v} \rangle + \langle u , x \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \rangle = \int_0^1 x u(x, y) \bar{v}(x, y) dx - \int_0^1 x u(x, 0) \bar{v}(x, 0) dx$$

pour $u, v \in \mathcal{B}$ où $\mathcal{B}$ est l'espace suivant :

$$\begin{aligned} v &\in L^2(]0, y[\quad , \quad H^1_0(]0, 1[)) \\ v \in \mathcal{B} &\iff \left\{ \begin{array}{l} x \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(]0, 1[\quad , \quad H^{-1}(]0, 1[)) \end{array} \right. \end{aligned}$$

De (3.10) nous tirons alors :

$$(3.11) \quad \operatorname{Re} \langle \Lambda u, u \rangle \geq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_L^2 \quad u \in D(-\Lambda)$$

Considérons maintenant un complexe λ tel que $\operatorname{Re} \lambda \gg 0$.

Alors l'équation :

$$(3.12) \quad \begin{cases} (\Lambda + \lambda)u = g & , \quad g \in L^2(\Omega) \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

a une solution unique dans $L^2(]0, y[, H_0^1(0, 1))$

De plus en utilisant toujours (3.10) nous avons :

$$(3.13) \quad \operatorname{Re} \langle (\Lambda + \lambda)u, u \rangle \geq \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \operatorname{Re} \lambda \|u\|_{L^2}^2$$

ce qui nous donne

$$(3.14) \quad \begin{cases} \|(\Lambda + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda + 1} \\ \|(\Lambda + \lambda)^{-n}\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda + 1)^n} \end{cases}$$

Comme $D(-\Lambda)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et que $-\Lambda$ est un opérateur fermé le théorème de Hille-Yoshida, [6], donne le résultat.

Théorème 3.2 : soient $f(t, y, x) \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$, $u_0(y, x) \in D(-\Lambda)$

Il existe une fonction u , unique, telle que

$$(3.15) \quad \begin{cases} u \in C^0([0, T], D(-\Lambda)) \\ u \in C^1(]0, T[, L^2(\Omega)) \\ \frac{du}{dt} + \Lambda u = f \\ u(0, y, x) = u_0(y, x) \end{cases}$$

Démonstration : le théorème 3.2 découle du lemme (3.1) et de la résolution classique du problème de Cauchy.

Corollaire 3.1 : soient $f(t, y, x)$ et $u_0(y, x)$ deux fonctions telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t,y,x) \in C^0([0,T], L^2(\Omega)) \\ u_0(y,x) \in L^2(]0,y[, H_0^1(]0,1[)) ; \quad x \frac{\partial u_0}{\partial y} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \in L^2(\Omega) \\ u_0(0,x) = 0 \end{array} \right.$$

Il existe une fonction unique telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t,y,x) \in C^0([0,T], D(-\Lambda)) ; u(t,y,x) \in C^1(]0,T[, L^2(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(]0,T[\times \Omega) = \mathcal{D}'(Q) \\ u(0,y,x) = u_0(y,x) \\ u(t,0,x) = 0 \\ u(t,y,0) = 0 \\ u(t,y,1) = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons passer à l'étude de la régularité des solutions.

Nous montrerons le :

Théorème 3.3 : soient $f \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$, $u_0 \in D(-\Lambda)$, et u la solution du théorème 3.2. Supposons que f est dans $H^k(Q)$. Pour tout intervalle fermé $[a,b] \subset]0,T[$ et tout intervalle fermé $[c,d] \subset]0,y[$,
 $u \in H^{t+\varepsilon}([a,b] \times [c,d] \times]0,1[)$.

Démonstration : soit $\varphi(t,y) \in \mathcal{D}(]0,T[\times]0,y[)$.

Posons $v(t,y,x) = \varphi(t,y) u(t,y,x)$, $\varphi(t,y) = 1$ sur $[a,b] \times [c,d]$.

Alors, la fonction v vérifie l'équation

$$(3.16) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + x \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \varphi f + u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = g$$

dans $\mathcal{D}'(B)$; $B = \mathbb{R}^2 \times]0,1[$, $x \in]0,1[$, $(t,y) \in \mathbb{R}^2$.

Si nous montrons que $g \in \mathcal{H}'(B)$ et $v \in \mathcal{H}(B)$, il en résultera que v n'est autre que la solution, unique, du problème du théorème (3.1). Ainsi il suffit d'appliquer le théorème (2.1), si g est assez régulière dès que f l'est. Montrons d'abord les deux lemmes :

Lemme 3.2 :

$g = \varphi f + u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$ est dans $L^2(B)$, donc dans $\mathcal{H}'(B)$.

Démonstration : si u est dans $L^2([0,T[\times \Omega) = L^2(Q)$ alors

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u$ est dans $L^2(B)$. D'autre part si f est dans $L^2(Q)$, alors φf est dans $L^2(B)$.

Lemme 3.3 : $v = \varphi u$ est dans l'espace $\mathcal{H}(B)$.

Démonstration : Rappelons que $u \in C^0([0,T], L^2([0,T[, H_0^1(0,1)))$

Donc $u \in L^2(Q)$ et $\frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(Q)$. Par suite $v \in L^2(B)$, $\frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(B)$,

mais v a des traces nulles sur les hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$.

Il en résulte que nous pouvons approcher v par des fonction $\mathcal{D}(B)$ dans l'espace $M(B)$ [13]. On commence par approcher v par des fonctions de $M(B)$ nulles au voisinage des hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$. Ensuite, par troncature, on approche v par des fonctions nulles au voisinage des hyperplans $\{x = 0\}$ et $\{x = 1\}$ et à support compact dans B . Puis alors, en régularisant par convolution, on approche v par des fonctions de $\mathcal{D}(B)$. Le lemme est ainsi établi.

Revenons à la démonstration du théorème 3.3.

a) $f \in L^2(Q) \implies g \in L^2(B)$, car $g = \varphi f + u \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$

d'après le théorème (2.2) $v \in H^1([a,b] \times [c,d] \times]0,1[)$

comme $\varphi = 1$ $[a,b] \times [c,d]$, nous avons bien

$$u \in H^\varepsilon([a,b] \times [c,d] \times]0,1[)$$

b) supposons qu'on ait montré (raisonnement par récurrence) que si $f \in H^{(k-1)\varepsilon}(Q)$, alors $u \in H^{k\varepsilon}([a,b] \times [c,d] \times]0,1[)$.

Alors $g = \varphi f + u(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + x \frac{\partial \varphi}{\partial y}) \in H^{k\varepsilon}(B)$, si $f \in H^{k\varepsilon}(Q)$

Utilisant de nouveau le théorème (2.2) nous obtenons

$$v = \varphi u \in H^{(1+k)\varepsilon}([a,b] \times [c,d] \times]0,1[) \quad \text{soit}$$

$$u \in H^{(k+1)\varepsilon}([a,b] \times [c,d] \times]0,1[) .$$

Le théorème (3.3) est ainsi démontré.

CHAPITRE 5.

-:-:-

UN RESULTAT DE NON COMPACTITE.

-:-

5.1. Un résultat de compacité :

Nous avons vu que sous les hypothèses (H.Γ) et (H.λ) l'opérateur $P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + \lambda$ est un isomorphisme de (Ω) sur $'(\Omega)$. Cette propriété est indépendante de l'hypothèse (H.0). P étant un isomorphisme de $\mathcal{N}(\Omega)$ sur $\mathcal{M}'(\Omega)$, nous pouvons considérer l'opérateur de Green G qui lui est associé. Voici comment est défini l'opérateur de Green : à tout élément f de $L^2(\Omega)$, nous associons, puisque $L^2(\Omega) \subset \mathcal{M}'(\Omega)$, la solution dans $\mathcal{N}(\Omega)$ de $Pu = f$. Comme $\mathcal{N}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, nous avons ainsi une application linéaire de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, que nous notons $u = Gf$. La question est de savoir si l'hypothèse (H.0) a une influence directe sur la compacité de G.

Théorème 1 : si, en plus des hypothèses (H.Γ) et (H.λ), P vérifie l'hypothèse (H.0), alors G est un opérateur compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration : P étant un isomorphisme l'application $f \rightarrow u$ (u étant la solution dans $\mathcal{N}(\Omega)$ de $Pu = f$) est continue de $\mathcal{M}'(\Omega)$ dans $\mathcal{N}(\Omega)$, donc à fortiori de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{N}(\Omega)$. Comme nous avons l'inclusion algébrique et topologique $\mathcal{N}'(\Omega) \subset H^E(\Omega)$, d'après le lemme 4.1, chapitre 4, et que l'injection de $H^E(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, l'ouvert Ω étant

borné, il s'en suit immédiatement que $G : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ est compacte.

5.2. Un résultat de non compacité.

La question qui se pose maintenant est de savoir si la condition (H.0) qui est suffisante pour que G soit compact, est nécessaire. On ne pourra obtenir ce résultat. Cependant on verra qu'elle est presque nécessaire. Ce résultat est d'ailleurs à rapprocher des résultats de J.M. Bony [3] dans lesquels la condition (H.0) qui est suffisante est presque nécessaire, dans un sens qui sera précisé dans le problème suivant.

Théorème 2.4 : les hypothèses (H. Γ) et (H. λ) étant toujours supposées vérifiées, supposons qu'il existe un sous-ouvert ω de Ω tel que, pour tout point $x \in \omega$, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $X_I(x)$ soit de rang $p < n$. Alors $G : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ n'est pas compact.

Démonstration : nous allons utiliser le théorème de Frobenius : il existe un changement local de coordonnées, soit θ , tel que dans le transformé ω_1 de ω par θ , les coordonnées des champs de vecteurs $X_0^*, \dots, X_r^*$, sur, par exemple l'axe $x_n = y$ soient nulles ($X_0^*, \dots, X_r^*$ désignent les champs de vecteurs transformés de $X_0, \dots, X_r$ par θ).

Considérons alors les fonctions e^{ipy} , $p \in \mathbb{N}$, ainsi que les fonctions $\phi_p = \phi e^{ipy}$ avec $\phi \in \mathcal{D}(\omega_1)$. Désignons par φ_p les transformées de ϕ_p par θ^{-1} . Si P^* est le transformé de P par θ , nous avons :

$$(2.1) \quad P^*(\phi_p) = e^{ipy} P^*(\phi)$$

D'autre part :

$$(2.2) \quad \|P^*(\phi_p)\|_{L^2(\omega_1)} = \|e^{ipy} P^*(\phi)\|_{L^2(\omega_1)} = \|P^*(\phi)\|_{L^2(\omega_1)} = C$$

Nous avons aussi :

$$(2.3) \quad \|P(\varphi_p)\| \leq C'$$

Remarquons alors que la suite $\varphi_p \in \mathcal{D}(\omega)$, n'admet pas de sous-suite φ_{p_k} convergente. En effet, si c'était le cas, la sous-suite $e^{ip_k y} \psi$ convergerait dans $L^2(\omega_1)$, ce qui est impossible si nous choisissons $\psi \neq 0$.

D'autre par, comme $\varphi_p \in \mathcal{D}(\Omega)$ nous avons :

$$(1.4) \quad \varphi_p = G(P(\varphi_p)) = Gv_p.$$

Ainsi d'après (5.2), (5.3) et (5.4), la suite v_p est bornée dans $L^2(\Omega)$ et Gv_p n'admet pas de sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Il s'en suit que $G : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ n'est pas compact.

-:-:-:-:-

Bibliographie.

-:-

- [1] M.S. Baouendi - Thèse Paris 1967
- [2] M.S. Baouendi - P. Grisvard - Sur une équation d'évolution changeant de type : C.R. Ac Sci. Paris 265 A (1967).
- [3] J.-M. Bony - Le principe du maximum et l'inégalité de Harnack pour des opérateurs elliptiques dégénérés. An. inst. Fourier 1969.
- [4] H. Brezis - Equations et Inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité.
- [5] G. Geymonat, P. Grisvard - Problèmes aux limites elliptiques dans L^p - Orsay, Janvier-Mars 1964.
- [6] E. Hille, R.-S. Phillips - Functional Analysis and semi-groups A.M.S. Coll. Pub XXX1 1957.
- [7] L. Hormander - Hypoelliptic - Second Order différentiel Equations Acta-Math. 1967.
- [8] L. Hormander - Linear partial differential Operators Springer-Verlag. Berlin 1963.
- [9] L. Hormander - Pseudo-différential - Opérateurs. C.P.A.M 1965.
- [10] T. Kato - Perturbation Théory for linear Opérateurs Springer Berlin 1966.
- [11] J.J. Kohn, L. Nirenberg - An algebra of Pseudo-différential Opérateurs C.P.A.M 18 (1965).

- [12]. J.L. Lions - Quelques méthodes de résolution de problèmes non linéaires
Dunod Paris 1969.
- [13] J.L. Lions - Séminaire de Mathématiques supérieures, Montréal. 1966.
- [14] J.L. Lions - Equations différentielles opérationnelles
Springer Berlin 1961.
- [15] J.L. Lions, E. Magènes - Problèmes aux limites non homogènes et applications-
Dunod - Paris 1968.
- [16] L. Nirenberg - Remarks on strongly elliptic partial differential Equations.
C.P.A.M 8 (1955).
- [17] L. Schwartz - Théorie des distributions I et II - Hermann Paris 1950 - 1951
(2ème édition 1957).
- [18] K. Yoshida - Functional Analysis , Springer Berlin 1965.

-:-:-:-

